5. BÖLÜM: REZİDÜLERİN UYGULAMALARI

5.2. Fourier Analizindeki Has Olmayan İntegraller

Rezidü teorisi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx$$

gibi yakınsak has olmayan integralleri hesaplamakta kolaylık sağlar. Burada, a pozitif bir sabiti göstermektedir. $f(x) = p(x)/q(x)$, burada $p(x)$ ve $q(x)$ reel katsayılı polinomlar ve ortak çarpana sahip değiller. Ayrıca, $q(x)$'in reel eksenin üst tarafında sıfırı yok ve en azından bir tane reel eksenin üzerinde sıfırı var. Bu tip integraller ile Fourier analizinde karşılaşılır.

Teorem: f kompleks düzlemde meromorf bir fonksiyon (kompleks düzlemin açık bir D kümesi üzerinde, fonksiyonun kutup noktaları dışında her yerde analitik olan fonksiyon) olsun, öyle ki z_k tekilliklerinin hiç biri reel eksende olmasın. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $a > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k>0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right)$$

Eğer, $f(x)$ tüm reel eksende reel ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k>0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k>0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right)\right)$$

Eğer, $a < 0$ ise, yukarıdaki formüllerde aynı değişiklikler olur:

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k>0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right) \to -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k<0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right)$$

Sonuç olarak, $f(x)$ tüm reel eksende reel ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax\, dx$$

Her iki integralde reeldir ve rezidü teoremi yardımıyla hesaplanır.

Örnek: $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$ integralini hesaplayınız.

$f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyondur: $f(-x) = f(x)$. Böylece,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$$

$\frac{1}{x^2+1}$ tüm reel eksende $x \in \mathbb{R}$'de reeldir.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx$$

$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ fonksiyonunun kutupları, z^2+1'in sıfırlarıdır.

$$z^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; z^2 = -1 \;\Rightarrow z = \pm i$$

$f(z)$'nin basit kutuplarıdır. Biri kompleks düzlemin üst yarısında ($z_1 = i$) ve diğeri kompleks düzlemin alt yarısındadır ($z_2 = -i$).

$a > 0$ alalım ve kontur üst yarı düzlemde olsun:

$$B_1 = \underset{z=z_1=i}{\mathrm{Res}} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1} \right) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{e^{iaz_1}}{2z_1} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \mathrm{Re}[2\pi i \underset{z=z_1=i}{\mathrm{Res}} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1} \right)] = \pi e^{-a}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

elde edilir. Eğer $a < 0$ ise, $z_2 = -i$ kutbundaki rezidünün integrali bulunur:

$$B_2 = \underset{z=z_2=-i}{\mathrm{Res}} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1} \right) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{iaz_2}}{2z_2} = \frac{e^{a}}{-2i}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \mathrm{Re}[-2\pi i \underset{z=z_2=-i}{\mathrm{Res}} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}\right)] = \pi e^{a}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{a}}{2}$$

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.