



Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Jeoloji Mühendisliği Bölümü



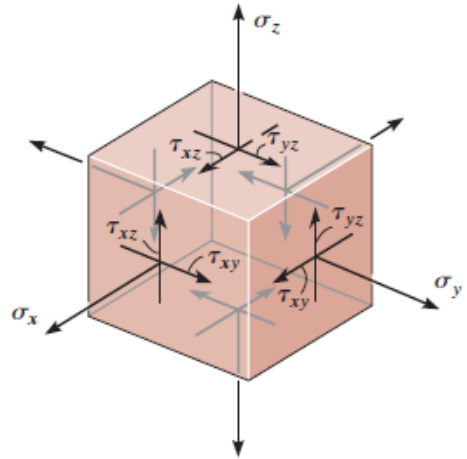
JEM234 MUKAVEMET

Ders Notları

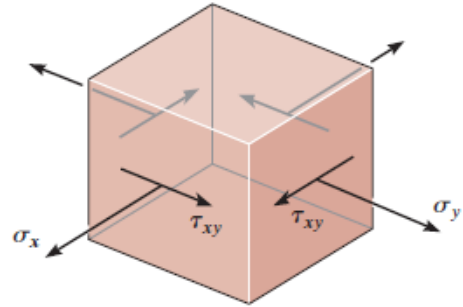
Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

6. DÜZLEM GERİLME DÖNÜŞÜMLERİ

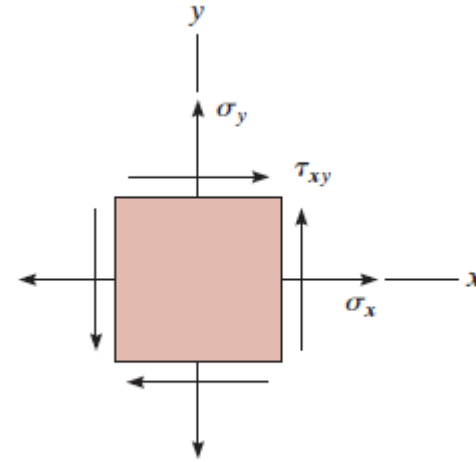
Malzemenin birim elemanında her yönde bağımsız altı adet normal ve makaslama gerilme bileşenleri birim alanlara etki eder (a). Pratik uygulamalarda ise analiz için “tekil düzlem”lerdeki gerilmeler incelenmektedir. Bu durum “Düzlem Gerilme” olarak adlandırılır (b). Düzlem gerilme durumu iki adet normal (σ_x, σ_y) ve bir adet makaslama bileşenleri (τ_{xy}) ile ifade edilir. Farklı bir yönelimde gerilmeye maruz kalan elemanda (b) üç farklı gerilme bileşeni ($\sigma_{x'}, \sigma_{y'}$ ve $\tau_{x'y'}$) gelişir. Düzlem gerilmelerin önceden tanınalmış eksenlerden © farklı yönelimli eksenlere dönüştürülmesi bu başlık altında incelenecektir (d). Özellikle açılık kuvvetler ve eğik düzlemlerde bu tür problemler oluşabilmektedir. Kuvvet dönüşümlerinde yönelim ve büyüklük bilinmeli iken, gerilmelerde her bileşenin yönelim/büyüklüğü yanında gerilmenin uygulandığı birim alanın da dikkatli olarak belirlenmesi gereklidir.



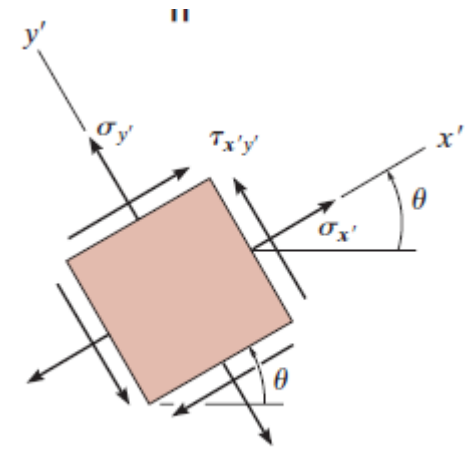
Genel gerilme durumu (a)



Düzlem gerilme durumu (b)



(c) Bilinen eksenlerde düzlem gerilme

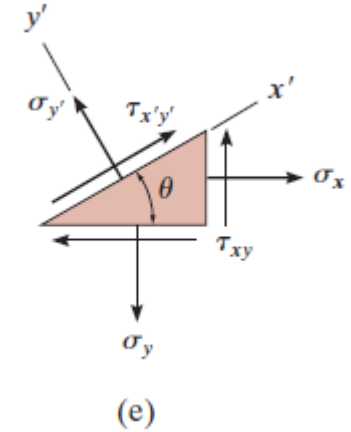
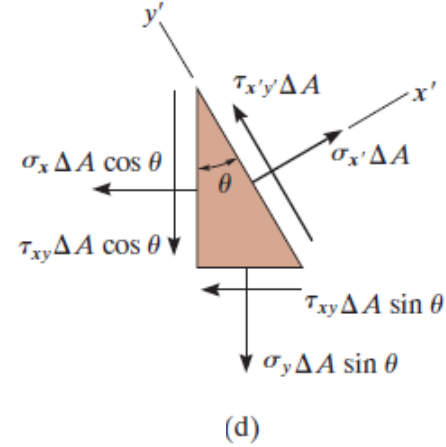
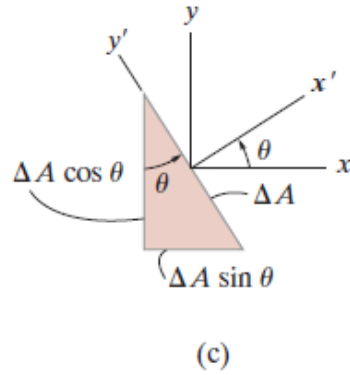
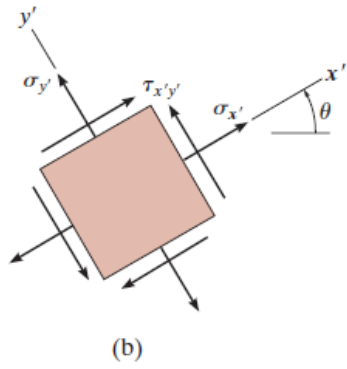
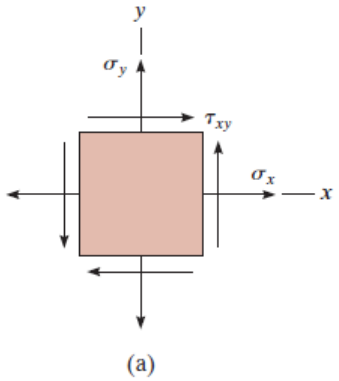


(d) Farklı eksenlerde düzlem gerilme

Analizde İzlenecek Yöntem

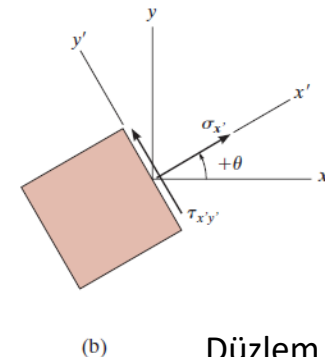
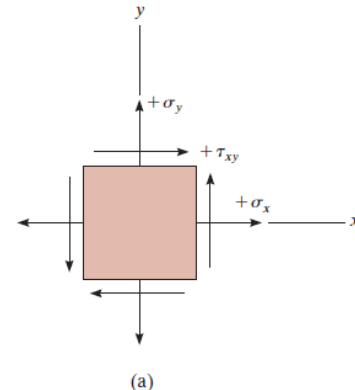
Bilinen gerilme durumunu (a) farklı yönelimdeki bir gerilme durumuna (b) dönüştürmek için aşağıda verilen yol izlenir.

- “x’ (+)” yönündeki düzlemde normal ($\sigma_{x'}$) ve makaslama ($\tau_{x'y'}$) gerilmelerini belirlemek için, “a” da verilen elemandan “c” kesiti alalım. Bu kesit alanı ΔA ise, komşu segment alanları $\Delta A \sin \theta$ kadar olur.
- “c” de verilen elemanın serbest cisim diyagramı çizilerek, eksenlerdeki gerilme bileşenleri ilgili gerilmelerin birim alanlar ile çarpılması ile bulunur.
- “x’” ve “y’” yönünde kuvvet denge denklemleri oluşturulur. Denklemlerde ortak olan birim alan “ ΔA ” iptal olacağından $\sigma_{x'}$ ve $\tau_{x'y'}$ belirlenebilir.
- “y’(+)” ne etkileyen normal gerilme $\sigma_{y'}$ belirlenecek ise, “e” deki gibi bir kesit alınarak aynı işlem tekrarlanır. Ancak buradaki $\tau_{x'y'}$ tamamlayıcı (complimentary) olduğundan hesaplanmasına gerek yoktur, büyüklüğü “x’” yönündeki ile aynı olmalıdır.



İşaret Notasyonu

+x ve +x’ eksenlerinde normal gerilmeler (σ_x ve $\sigma_{x'}$) ile +y ve +y’ yönlerinde etkileyen makaslama gerilmeleri τ_{xy} ve $\tau_{x'y'}$ pozitifdir (a). “x” ekseninden “x’” eksenine doğru “ θ ” açısı ile yönelen (b) eksenlerde de x’ boyunca normal gerilme pozitif, y’ boyunca makaslama gerilmesi pozitifdir.



Normal ve Makaslama Gerilmesi Bileşenleri

İlgili işaret notasyonuna göre “a” da verilen elemandan eğimli düzlem boyunca kesit alınarak oluşturulacak “b” elemanında yatay alan $\Delta A \sin \theta$ ve dikey alan $\Delta A \cos \theta$ kadar olacaktır. Oluşacak elemanın serbest cisim diyagramı “c” de verilmiştir. Buna göre eğimli düzlemdeki denge

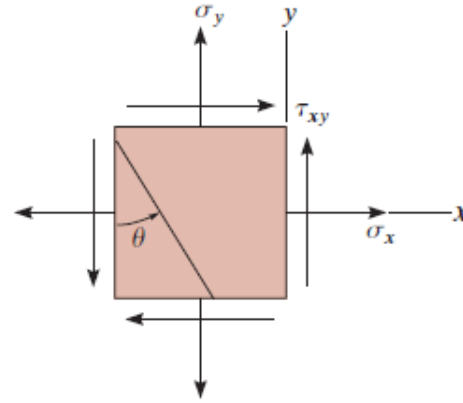
$$\begin{aligned}
 +\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad & \sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta \\
 & - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta = 0 \\
 & \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \\
 +\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad & \tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta \\
 & - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta = 0 \\
 & \tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ve $\sin 2\theta = (1 - \cos 2\theta) / 2$ ile $\cos 2\theta = (1 + \cos 2\theta) / 2$ olup;

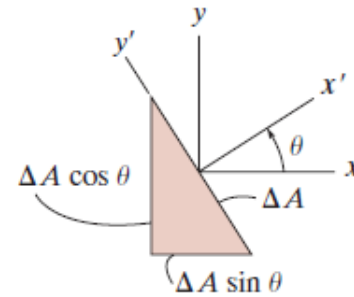
$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

y' yönündeki normal gerilme istenirse, eksenlerin birbirine dik olması nedeniyle $\theta = (\theta + 90^\circ)$

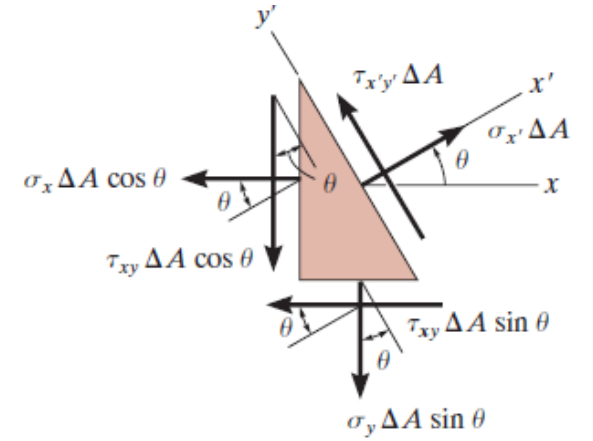
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$



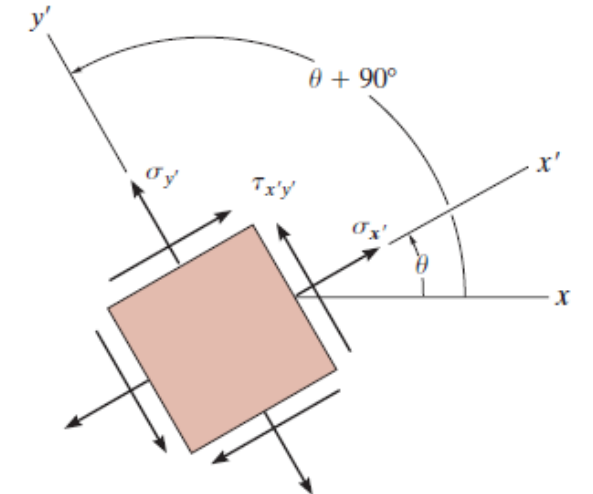
(a)



(b)



(c)



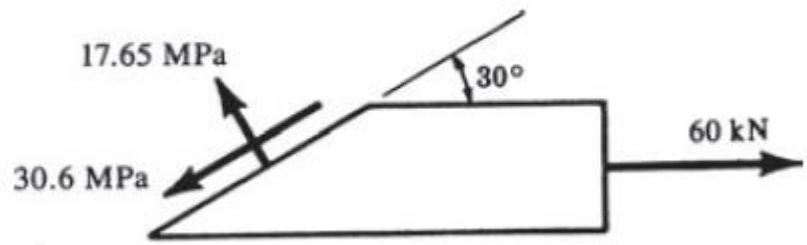
(d)

Soru 17. Kesiti 850 mm² olan kaya örneği 60 kN luk çekme kuvvetine maruz bırakılmıştır. Yükleme yönü ile 30° açılı düzlemdeki normal ve makaslama gerilmelerini hesaplayınız.

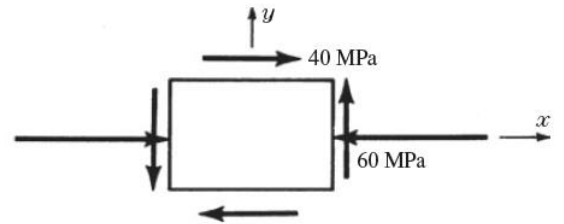
$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{60}{850} = 70.6 \text{ MPa (ÇEKME+)}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta = 30.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_x (1 - \cos 2\theta) = 17.65 \text{ MPa}$$



Soru 18. Şekildeki metal malzeme 60 MPa sıkışma ve 40 MPa makaslama gerilmeleri altındadır. (a) Normal gerilme ile 30° açılı düzlemdeki normal ve makaslama gerilmelerini hesaplayınız. (b) Eğimli düzlemdeki maksimum normal ve makaslama gerilmesini hesaplayınız.



(a)
$$\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \sigma = -\frac{60}{2} + \frac{60}{2} \cos 60^\circ - 40 \sin 60^\circ = -49.6 \text{ MPa}$$

$$\tau = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad \tau = -\frac{60}{2} \sin 60^\circ - 40 \cos 60^\circ = -46 \text{ MPa}$$

(b)
$$\sigma_{\max} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma_x \right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm \sqrt{(60/2)^2 + 40^2} = \pm 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{60}{2} + \sqrt{30^2 + 40^2} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2} \sigma_x} = \frac{40}{-60/2} = -\frac{4}{3} \quad \therefore \theta_p = -26.57^\circ, 63.43^\circ \quad \text{Asal gerilme yönleri}$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{60}{2} - \sqrt{30^2 + 40^2} = -80 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2} \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{60/2}{40} = \frac{3}{4} \quad \therefore \theta_s = 18.43^\circ, 108.4^\circ \quad \text{Makaslama gerilmesi yönleri}$$