



Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Jeoloji Mühendisliği Bölümü



JEM234 MUKAVEMET

Ders Notları

Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

Mohr Çemberi – Düzlem Gerilmesi

Asal normal ve makaslama gerilmelerinin farklı düzlemlerdeki değişimi ve bileşenlerinin büyüklük ve yönelimlerinin belirlenmesi için grafik bir yöntem olan Mohr çemberi kullanılır. Farklı yönelimdeki düzlemlerde asal normal ve makaslama gerilmeleri;

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

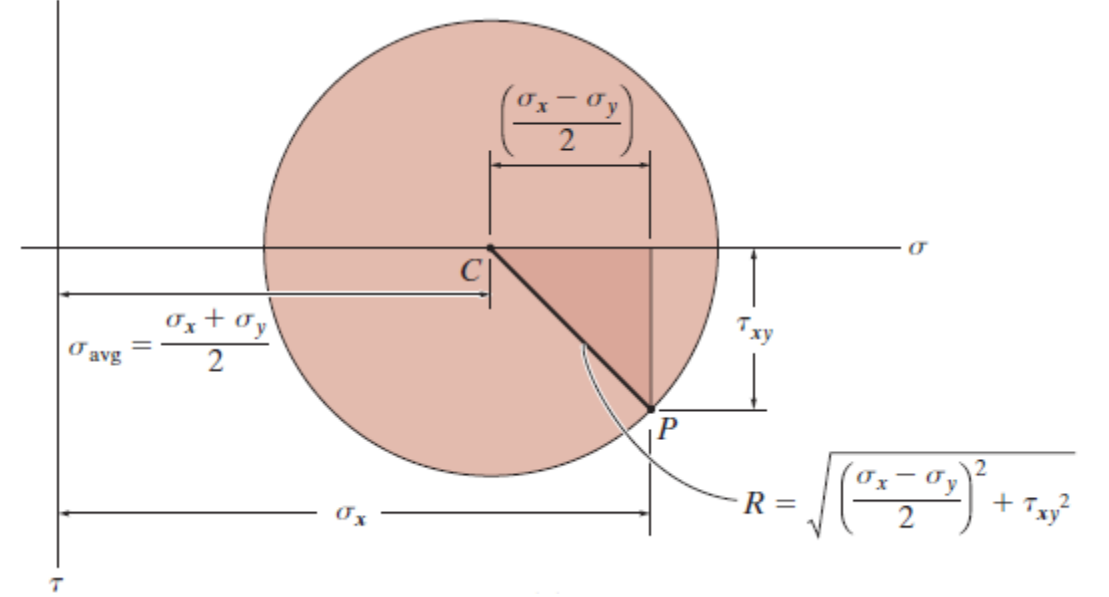
Eşitliklerdeki açı değerini elimine etmek için kareleri alınır ve düzenlenirse;

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Eşitlikte σ_x , σ_y , σ_z ve τ_{xy} bilinen değerler olup, sade bir hale getirilen hali çember denklemini verir. Çemberin yarıçapı "R" ve merkezi C(σ_{avg} , 0) olarak tanımlanır.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

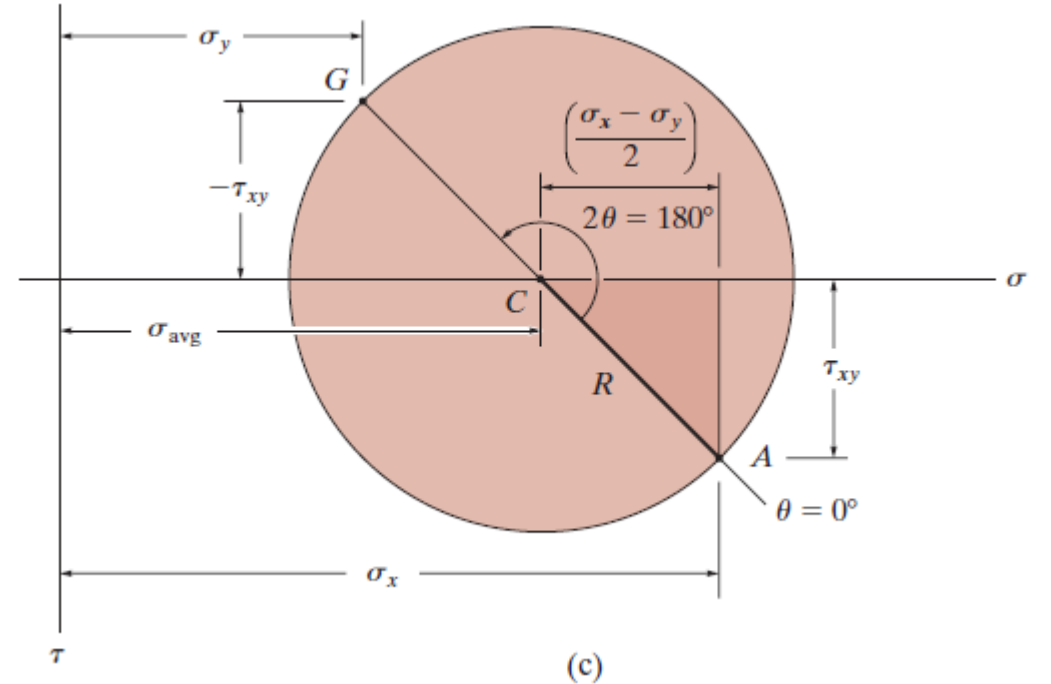
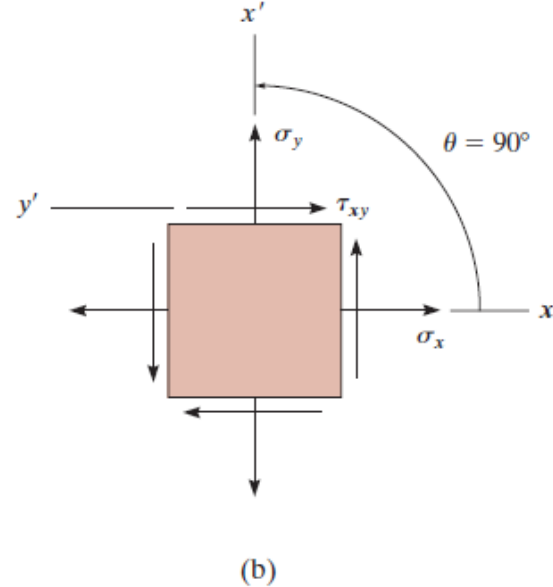
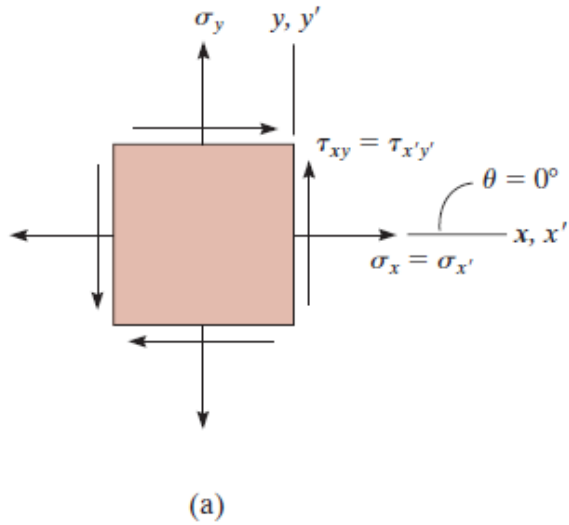
$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



Mohr çemberi (Mohr, 1900)

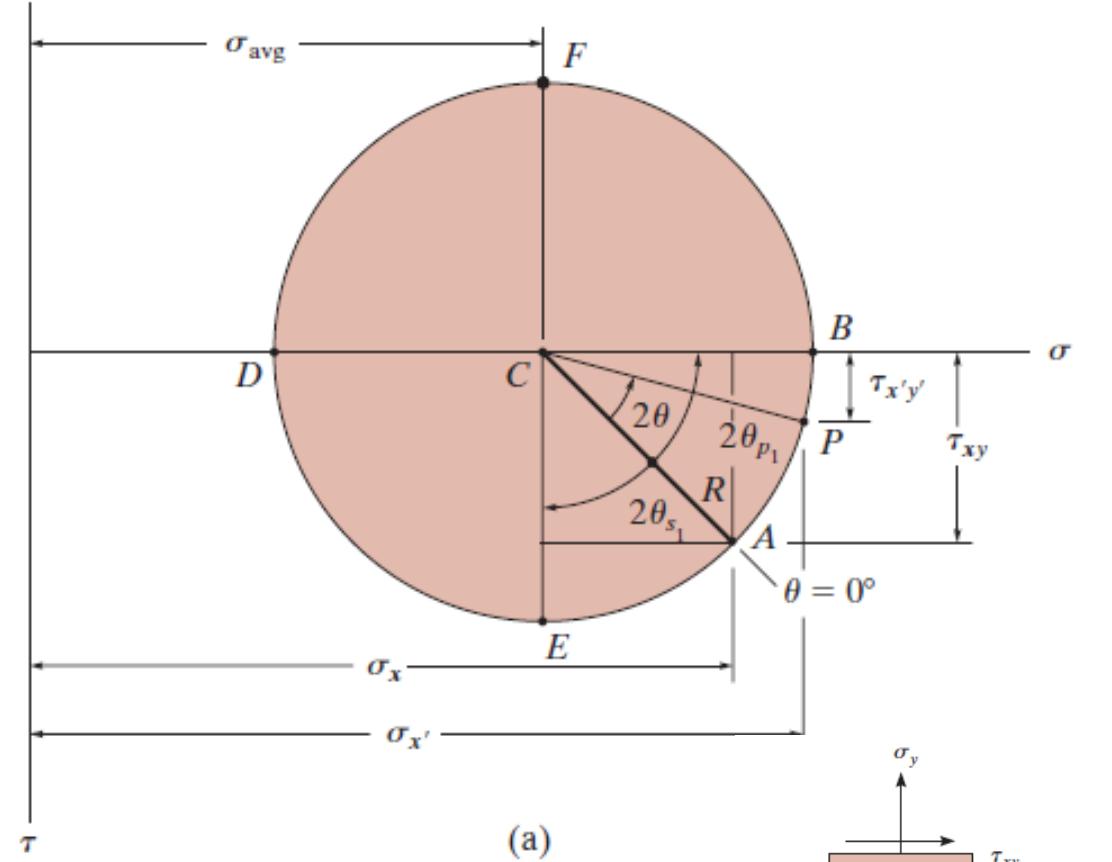
Mohr Çemberinin her noktası önceden tanımlanmış ve “ θ ” açısı ile yönlendirilen x' eksenindeki elemanda gelişecek $\sigma_{x'}$ ve $\tau_{x'y'}$ gerilmelerine karşılık gelir. x' eksenini ile x eksenini aynı yönde ise (a), $\theta=0^\circ$, $\sigma'_{x'}=\sigma_x$, $\tau_{x'y'}=\tau_{xy}$ olacaktır. Bu nokta “**Referans Noktası**” olarak adlandırılır ve çember üzerindeki yeri $A(\sigma_x , \tau_{xy})$ ile gösterilir (c). x' eksenini saat yönü tersine 90° döndürürsek (b), $\sigma'_{x'}=\sigma_y$, $\tau_{x'y'}=-\tau_{xy}$ olacaktır. Bu nokta çember üzerinde G noktası olup, koordinatları $G(\sigma_y , -\tau_{xy})$ ile gösterilir. CG doğru parçası CA “**Referans Çizgisi**” olan doğru parçasından 180° saat yönü tersine konumda yer alır.

Diğer deyişle; birim elemanda x' ekseninin “ θ ” kadar döndürülmesi çember üzerinde aynı yönde “ 2θ ” olarak ifade edilecektir.

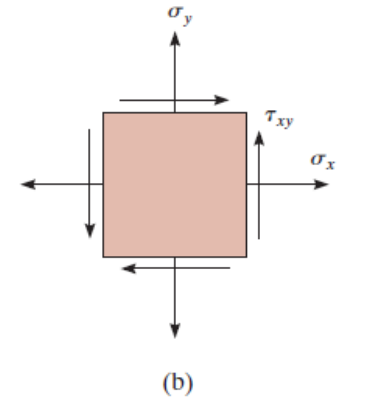


Mohr Çemberinin Çizim Aşamaları

- Yatay eksen normal gerilme (σ), düşey eksen makaslama gerilmesine (τ) karşılık gelecek şekilde eşit ölçekli eksenler birbirine dik şekilde çizilir. Not: makaslama gerilmesi aşağı yönde pozitif olacaktır (a).
- Normal ve makaslama gerilmeleri (b) pozitif olmak üzere normal gerilme ekseninde çemberin Merkezi olan C noktası $\sigma_{avg}=(\sigma_x+\sigma_y)/2$ belirlenir (a)
- Koordinatları (σ_x, τ_{xy}) olan referans noktası işaretlenir (A noktası). Bu nokta birim elemanın sağ el yönündeki kesitinde yer alan normal ve makaslama gerilmelerini ifade eder. Burada, x ve x' örtüşmekte olup, $\theta=0^\circ$ dir (a)
- C ile A noktasını birleştiren CA çizilir. Bu doğru çemberin yarıçapını ifade eder.

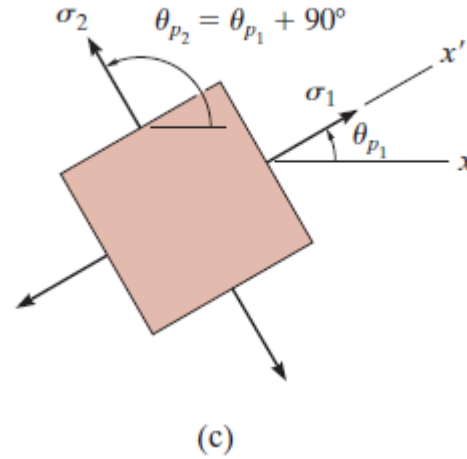
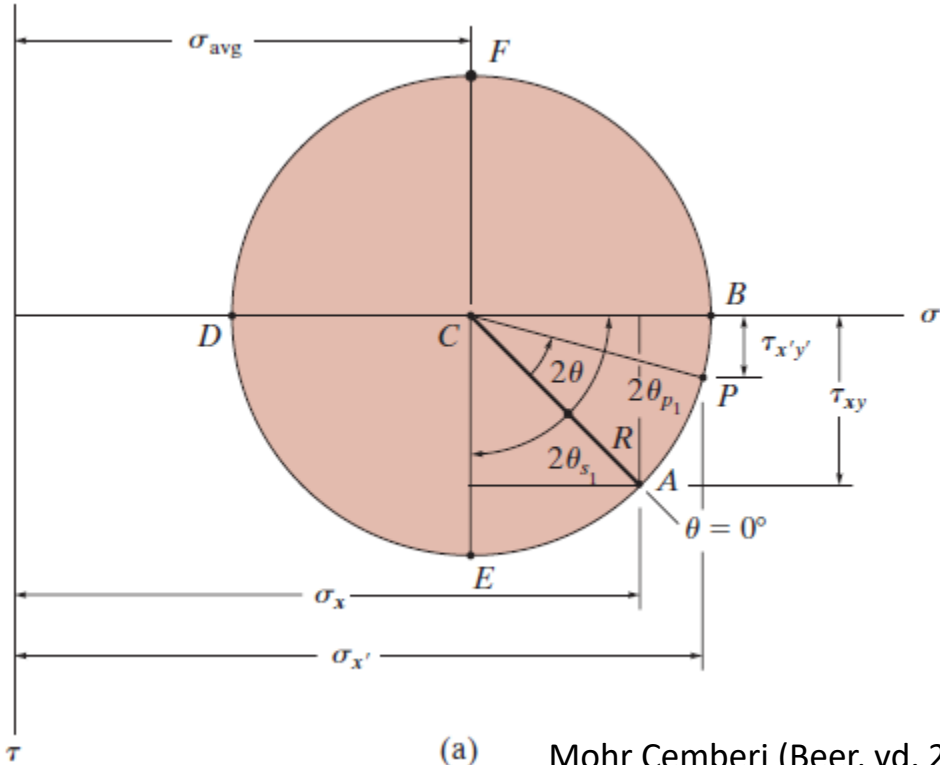


Mohr Çemberi (Beer, vd. 2011)



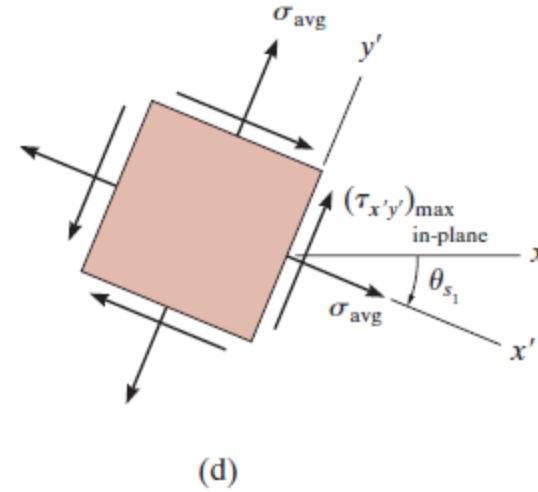
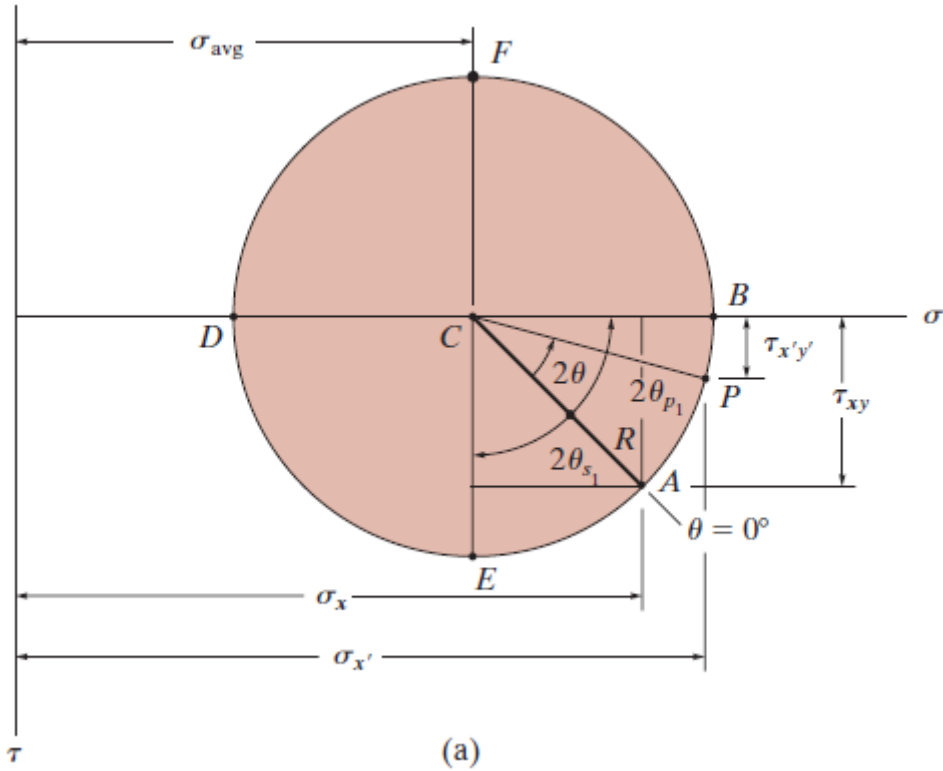
Asal Gerilmelerin Gösterilmesi

- Asal normal gerilmeler olan σ_1 ve σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), B ve D noktalarının koordinatlarıdır. Bu noktalar normal gerilme eksenini keser ve makaslama gerilmesi "0°" olur.
- Bu asal gerilmeler " θ_{p1} " ve " θ_{p2} " açıları ile ifade edilen düzlemlerde etkindir (c). Bu açılar çember üzerinde gösterilmiş olup, CA'dan CB ve CD ye çizilen açılardır.
- Her iki açı birbirine dik olduğundan birini belirlemek yeterlidir. $2\theta_p$ açısının rotasyon yönü (saat yönü tersi), +x ile +x' arasındaki açı ile aynı yödedir (c).



Maksimum Düzlem Makaslama Gerilmesinin Gösterilmesi

- Ortalama normal gerilme ve maksimum düzlem makaslama gerilmesi bileşenleri "E" ve "F" noktaları ile gösterilmiştir (a).
- Bu durumda " θ_{s1} " ve " θ_{s2} " açıları bu gerilmeleri içeren düzlemlerin yönelimini verir (d). " $2\theta_{s1}$ " açısı (a) trigonometri ile hesaplanabilir. Burada rotasyon saat yönünde olup CA'dan CE'ye doğrudur. Aynı şekilde elemanda da yön aynı olmalıdır " θ_{s1} " (d)



Farklı Yönlerdeki Gerilmelerin Gösterilmesi

Belirli düzlemde " θ " açısı ile yönelen x' eksenine etki eden normal ve makaslama gerilme bileşenleri " $\sigma_{x'}$ " ve " $\sigma_{y'}$ " P noktasının trigonometri ile belirlenmesi ile bulunabilir. P'nin belirlenmesi için bilinen " θ " açısı (saat yönü tersi) çemberdeki " 2θ " nın ölçülmesi ile belirlenir. Bunun için radial CA ile CP arasındaki açı ölçülmelidir. Not: Grafikte makaslama yukarı yönde pozitif oluşturulmuş ise 2θ açısının zıt yönde ölçülmesi gerekir.

