Ankara Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Jeoloji Mühendisliği Bölümü

JEM234 MUKAVEMET

Ders Notları

Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

Asal Yamulmalar

Gerilmede olduğu gibi, bir cisim herhangi bir noktada oriente edilirse elemanda hiç makaslama yamulması olmadan tüm deformasyon normal yamulmaya bağlı gelişebilir. Bu durum “asal yamulma” olarak adlandırılır ve malzeme izotrop ise asal gerilme ve asal yamulma eksenleri çakışır.

$$tan2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} \pm \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

Maksimum Düzlem Makaslama Yamulması

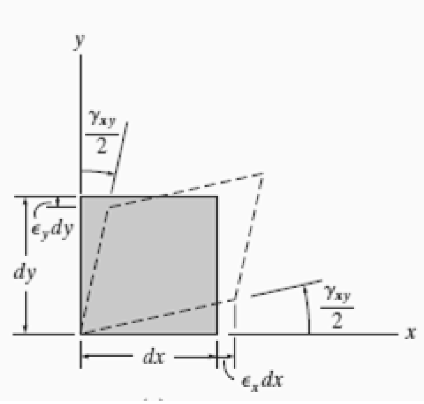
Maksimum makaslama gelişen x’ ekseninde gerilmelerde olduğu gibi ortalama normal yamulmalar da gelişir.

$$tan2\theta_s = -(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}})$$

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} \pm \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

$$\varepsilon_{avg} = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2}$$

Soru 21. Şekildeki birim eleman x yönünde 500×10^{-6}, y yönünde -300×10^{-6} kadar normal ve xy makaslama yönünde 200×10^{-6} yamulmaya maruzdur. Aynı elemanda 30 saat yönündeki yamulmaları belirleyiniz.



$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(-30^\circ))$$

$$+ \left[\frac{200(10^{-6})}{2}\right]\sin(2(-30^\circ))$$

$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\sin(2(-30^\circ)) + \frac{200(10^{-6})}{2}\cos(2(-30^\circ))$$

$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

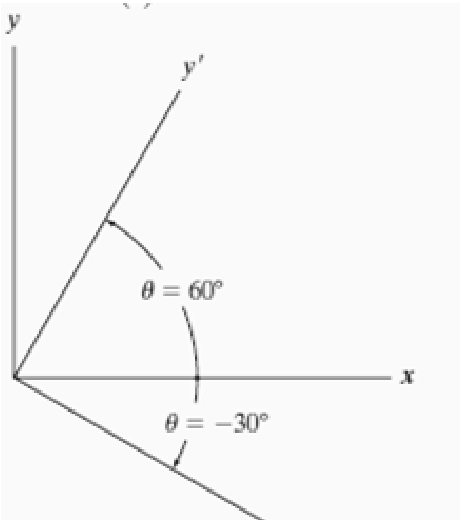
The strain in the y' direction can be obtained from Eq. 10–7 with $\theta = -30^\circ$. However, we can also obtain $\epsilon_{y'}$ using Eq. 10–5 with $\theta = 60^\circ (\theta = -30^\circ + 90^\circ)$, Fig. 10–5*b*. We have with $\epsilon_{y'}$ replacing $\epsilon_{x'}$,

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

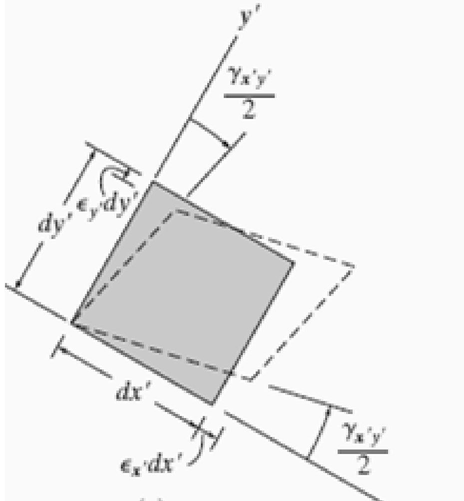
$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(60^\circ))$$

$$+ \frac{200(10^{-6})}{2}\sin(2(60^\circ))$$

$$\epsilon_{y'} = -13.4(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$



(b)



(c)

Düzlem Yamulmada Mohr Çemberi

- Pozitif yatay eksende normal yamulma (ε) ve düşey düzlemde pozitif aşağıda olmak üzere makaslama yamulmasının yarısı ($\gamma/2$) olacak şekilde eksenler çizilir

- Çemberin merkezi olan C noktası için orijinden pozitif olmak üzere "$\varepsilon_{avg}=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2$" noktası belirlenir.

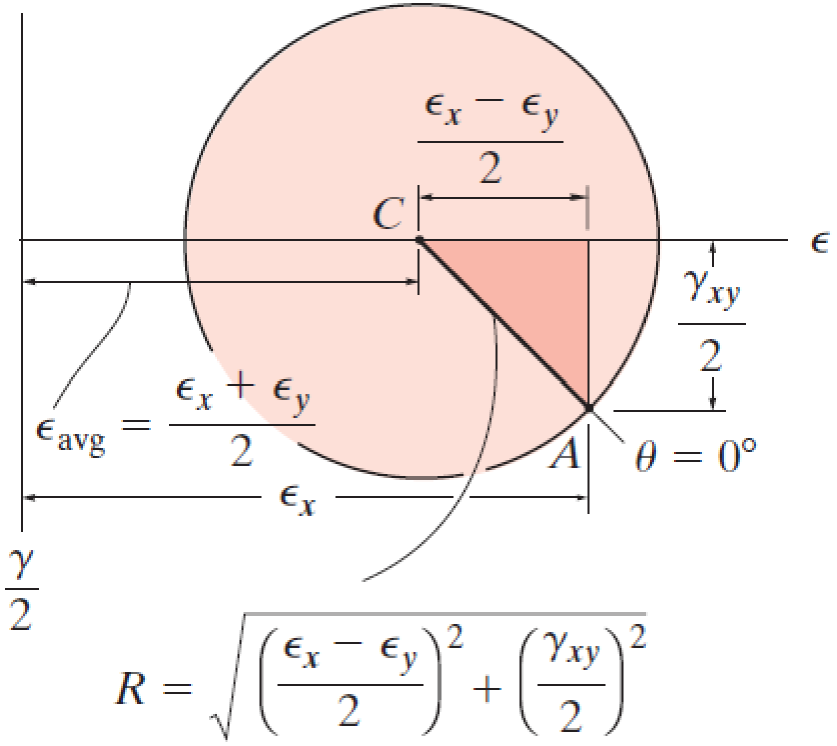
- Referans noktas "A" nın yeri ise "ε_x, $\gamma_{xy}/2$) noktası olmak üzere işaretlenir. Bu noktada x' ile x eksenleri örtüşür ($\theta=0°$)

- AC birleştirilerek çemberin yarıçapı olan "R" belirlenir. Bu yarıçap kullanılarak çember tamamlanır.

$$(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{avg})^2 + (\frac{\gamma_{x'y'}}{2})^2 = R^2$$

$$R = \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

$$\varepsilon_{avg} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$



Düzlem yamulmada Mohr çemberi (Beer, vd. 2011)

Asal Yamulmalar

Makaslama yamulmasının sıfır olduğu ($\gamma/2=0$) “B” ve “D” noktalarındaki asal ε_1 ve ε_2 yamulmalarının koordinat noktalarıdır

CA’ dan CB’ ye saat yönünün tersi olan doğru olan $2\theta_{p1}$ açısı ε_2 nin etkin olduğu düzlemdeki rotasyon açısını tanımlar. Elemandaki x ile x’ arasındaki açı olan “θ_{p1}” ile bu açı aynı yöndedir.

Elemandaki normal $\varepsilon 1$ ve $\varepsilon 2$ yamulmaları pozitif (a) ise eleman x’ ve y’ yönünde kesikli çizgiler boyunca yamulmaya uğrar.

Maksimum Düzlemsel Yamulma

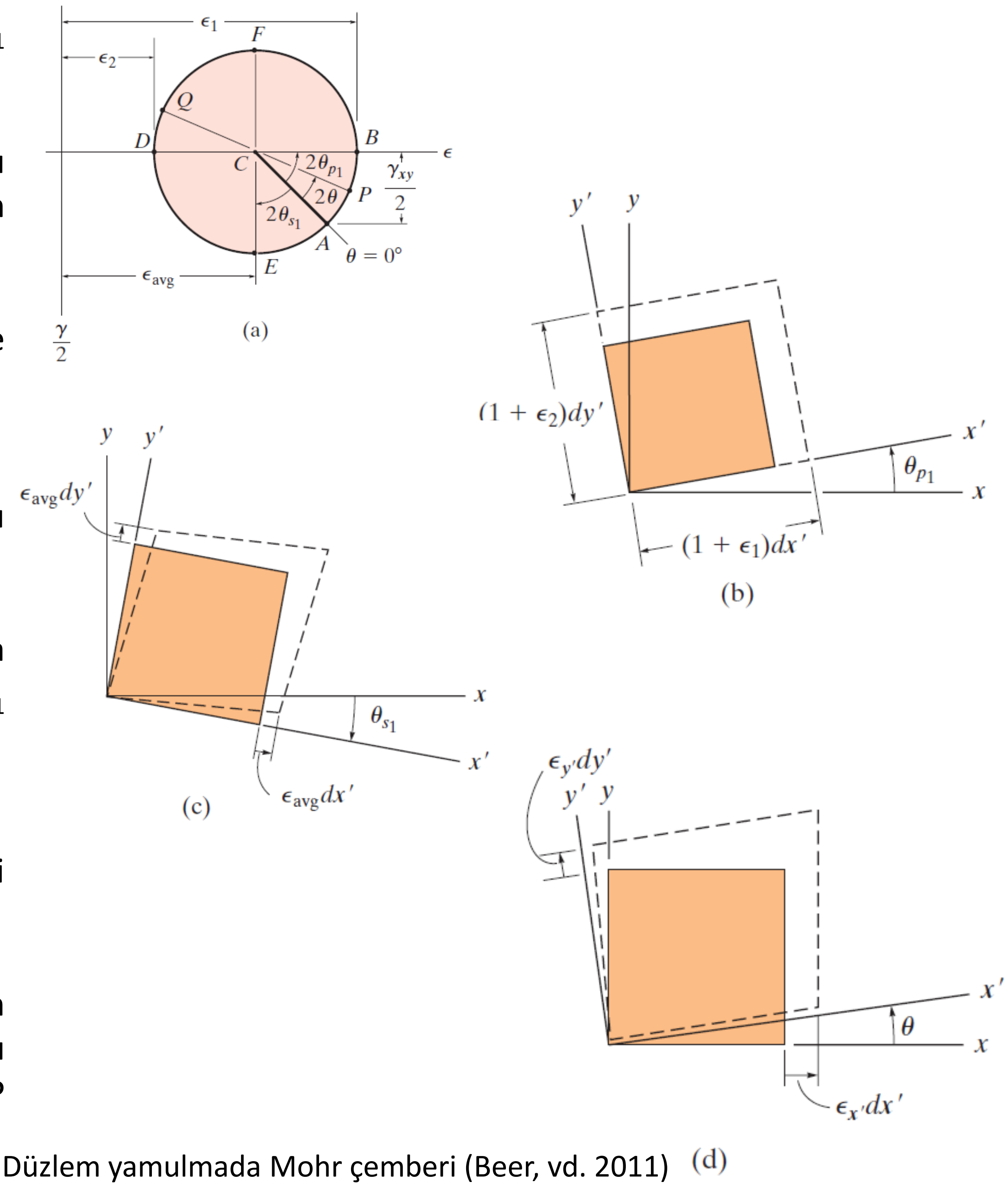
Ortalama maksimum normal yamulma ve makaslama yamulmasının yarısı çemberdeki E veya F noktalarının koordinatlarıdır (a).

CA dan CE’ye doğru saat yönü tersi olan $2\theta_{s1}$ açısı maksimum makaslama yamulması ve ortalama normal yamulma oryantasyon açısı olup, elemandaki θ_{s1} ile aynı yöndedir. (c)

Gelişigüzel Düzlemsel Yamulma

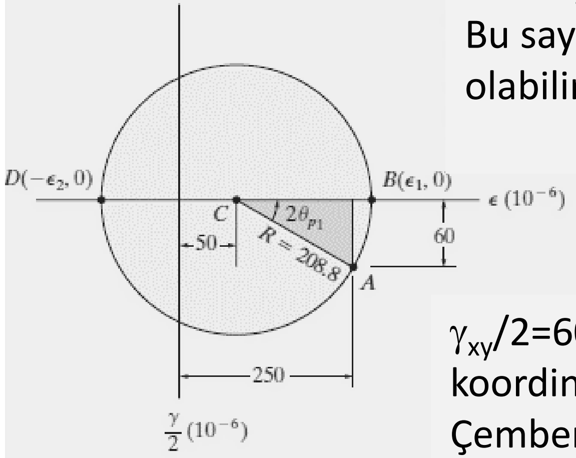
Normalden q açısı ile farklı düzlemdeki $\varepsilon_{x'}$ ve $\gamma_{x'y'}$ yamulma bileşenleri çemberdeki “P” noktasıdır.

Elemandaki θ açısı çembderde 2θ kadar olup, CA dan CP ye doğru taranan açıdır. Elemanda ve çemberdeki açı ölçümlerinin aynı yönde yapılması önemlidir. Ayrıca $\varepsilon_{y'}$ istenirse, çemberdeki Q noktası kullanılmalıdır. CQ ile CP arasında 180° fark vardır, bu da x’ eksenindeki 90° ye karşılık gelir.



Düzlem yamulmada Mohr çemberi (Beer, vd. 2011)

Soru 22. Şekildeki birim eleman x yönünde 250×10^{-6}, y yönünde -150×10^{-6} kadar normal ve xy makaslama yönünde 120×10^{-6} yamulmaya maruzdur. Asal yamulmalar ve yönleri belirleyiniz.



(a)

Mohr çemberinde +γ/2 aşağı yönlü olmalıdır. Bu sayede cisimde saat yönü tersi dönme olabilir. "C" noktası merkez olup;

$$\epsilon_{avg} = \frac{250 + (-150)}{2}(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

$\gamma_{xy}/2$=60x10-6 olup, A referans noktasının koordinatları (250x10-6 ; 60x10-6) dır. Çemberin yarıçapı CA kadar olup, üçgenden;

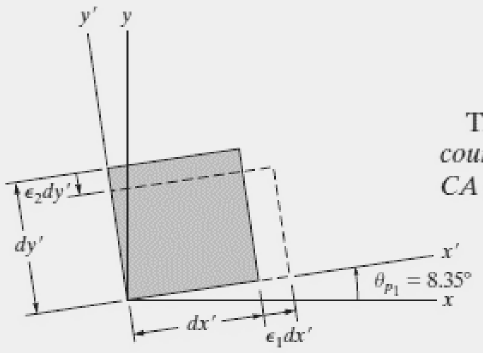
$$R = \left[\sqrt{(250-50)^2 + (60)^2}\right](10^{-6}) = 208.8(10^{-6})$$

Asal minimum ve maksimum yamulmalar B ve D noktasındadır.

$$\epsilon_1 = (50 + 208.8)(10^{-6}) = 259(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$
$$\epsilon_2 = (50 - 208.8)(10^{-6}) = -159(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

The direction of the positive principal strain ϵ_1 is defined by the *counterclockwise* angle $2\theta_{p_1}$, measured from the radial reference line CA ($\theta = 0°$) to the line CB. We have

$$\tan 2\theta_{p_1} = \frac{60}{(250-50)}$$
$$\theta_{p_1} = 8.35° \qquad \textit{Ans.}$$



(b)

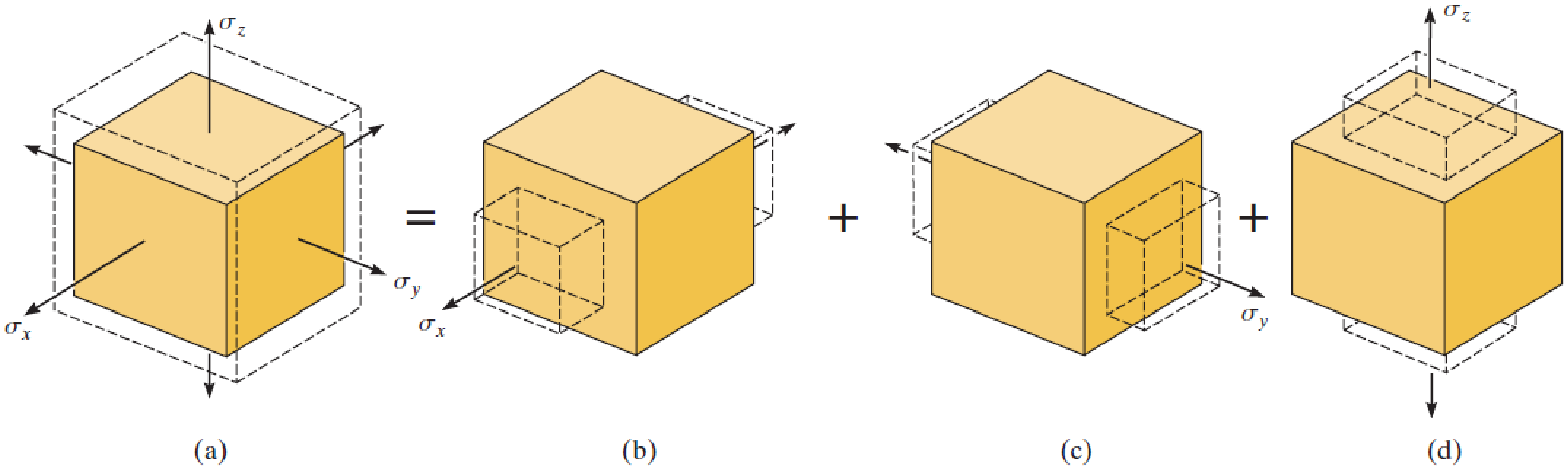
Fig. 10–10

Hence, the side dx' of the element is oriented *counterclockwise* 8.35° as shown in Fig. 10–10*b*. This also defines the direction of ϵ_1. The deformation of the element is also shown in the figure.

Malzeme Özellikleri Arasındaki İlişkiler

Multi-eksenel yükleme koşulları ve yamulma karakteristiklerinin belirlenmesinde malzemelerin yük altındaki davranışlarının farklı yönlerde belirlenmesinde ve dizaynda önemlidir. Ancak, ilişkiler malzemenin lineer-elastik, homojen ve izotrop olması kabulleri ile geçerlidir. Üç eksende gerilmeye maruz birim elemanda (a) normal yamulmalar gelişir. Bu gerilmeler ve ilişkili yamulmalar; süperpozisyon, Hooke yasası ve Poisson oranı çerçevesinde incelenir. Örneğin "x" yönündeki normal yamulma (b) diğer eksenlerdeki yamulmalar ile de ilişkili olmak durumundadır (c, d). X eksenindeki uzama sonucunda diğer yönlerde sıkışma gerçekleşecek ve elastik sınırlarda birbirleriyle ilişkili olacaklardır.

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_x'' = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_x''' = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$



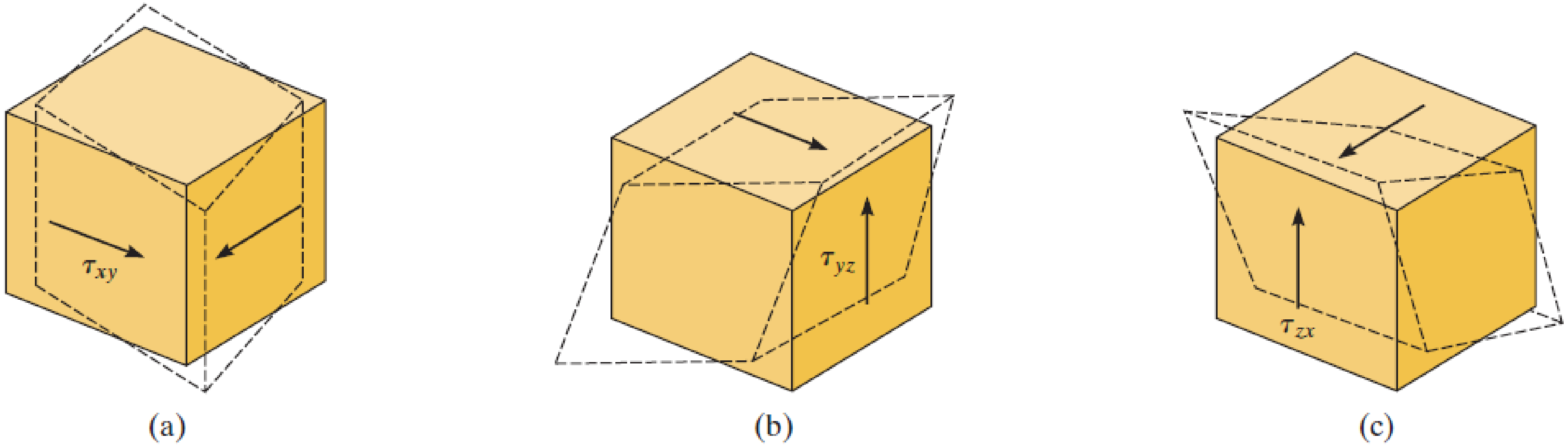
Elastik parametre ilişkileri (Beer, vd. 2011)

Üç eksenli yüklemede çekme gerilmesi pozitif, sıkışma gerilmesi negatiftir. Oluşan normal yamulma pozitif ise malzemede uzama, negatif ise malzemede sıkışma gerçekleşir.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$



Elastik parametre ilişkileri (Beer, vd. 2011)

Üç eksenli yüklemede gelişecek makaslama yamulmaları da hooke yasası gereği eksenlerde yayılır. Normal ve makaslama yamulmalarında elastisite modülü (E) ve makaslama modülü (G) nün yamulma miktarını kontrol ettiğine dikkat edilmeldir.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$