BÖLÜM 6
Madde içinde Manyetik Alanlar

Doç. Dr. Fulya Bağcı

Ankara Üniversitesi,

Fizik Mühendisliği Bölümü

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:

Elektromagnetik Teori, David J. Griffiths, Gazi Kitabevi (Çeviri: Prof. Dr. Basri Ünal)

İçerik

- 6.2 Mıknatıslanmış Bir Cismin Alanı
- 6.2.1 Bağlı akımlar
- 6.2.2 Bağlı akımların fiziksel yorumu
- 6.2.3 Madde içinde magnetik alan

6.2 Mıknatıslanmış Bir Cismin Alanı

6.2.1. Bağlı akımlar

- Bir parça mıknatıslanmış malzememiz olsun. Bir tek $\boldsymbol{m}$ dipolünün vektör potansiyeli (5.bölümden hatırlayınız)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}.$$

- $d\tau'$ hacim elemanı ve ***M*** birim hacimdeki dipol momenti olmak üzere,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,d\tau'$$

- İntegral daha iyi bir formda yazılabilir. Bunun için şundan yararlanırız:

$$\nabla'\frac{1}{\imath} = \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}$$

$$\boldsymbol{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int[\,\boldsymbol{M}(r')\times\nabla'\frac{1}{\imath}]\,\mathrm{d}\tau$$

- Kısmi integral alma ve çarpım kuralını uygulayarak

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int \frac{1}{\imath}[\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')]\, d\tau' - \int \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\imath}\right] d\tau'\right\}$$

- Diverjans teoremini uygularsak,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{\imath}[\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')]\, d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{1}{\imath}[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{a}']$$

- Birinci terim hacim akımının potansiyeline benzemektedir: Hacim akımı $\mathbf{J}_b$:

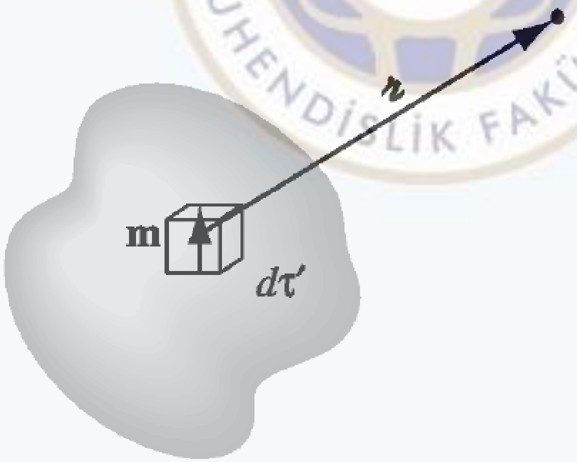
$$\overrightarrow{J}_b = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M}$$

- Diğer terim ise yüzey akımının (K_b) potansiyelidir. $\hat{n}$ normal birim vektördür.

$$\overrightarrow{K}_b = \overrightarrow{M} \times n$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{\imath}\, d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')}{\imath}\, da'$$

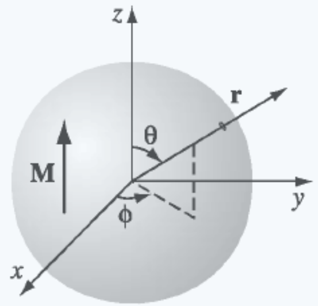
- Mıknatıslanmış bir cismin potansiyeli (dolayısıyla manyetik alanı) malzemenin her yerinde bulunan bir $\boldsymbol{J}_b = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}$ hacim akımı ve sınır üzerinde bulunan bir $\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$ yüzey akımı tarafından oluşturulur.
- Tüm sonsuz küçük dipollerin katkısını almak yerine (bknz şekil) ilk önce bağlı akımları belirleriz. Bu hacim ve yüzey akımlarının potansiyelini belirleriz. (Elektriksel halde de benzer biçimde kutuplanmış bir cismin alanı $\rho_b = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{P}$ hacim yükü ile ($\sigma_b = \boldsymbol{P}.\hat{\boldsymbol{n}}$) yüzey yükünün alanlarının toplamı idi.)



Örnek 6.1 Düzgün olarak mıknatıslanmış bir kürenin magnetik alanını bulunuz.

Çözüm: z eksenini M yönünde seçerek

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \qquad \vec{K}_b = \vec{M} \times n = M \sin\theta \phi$$



Düzgün bir σ yüzey yüklü dönen bir küresel kabuk

$$\boldsymbol{K} = \sigma\boldsymbol{\vartheta} = \sigma\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} = \sigma\omega R \sin\theta\hat{r}$$

tutarında bir yüzey akım yoğunluğuna karşılık gelir. Bu yüzden düzgün olarak mıknatıslanmış bir kürenin alanı dönen bir küresel kabuğun alanına özdeştir. Örnek 5.11'de B manyetik alanını kürenin içinde,

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M}$$

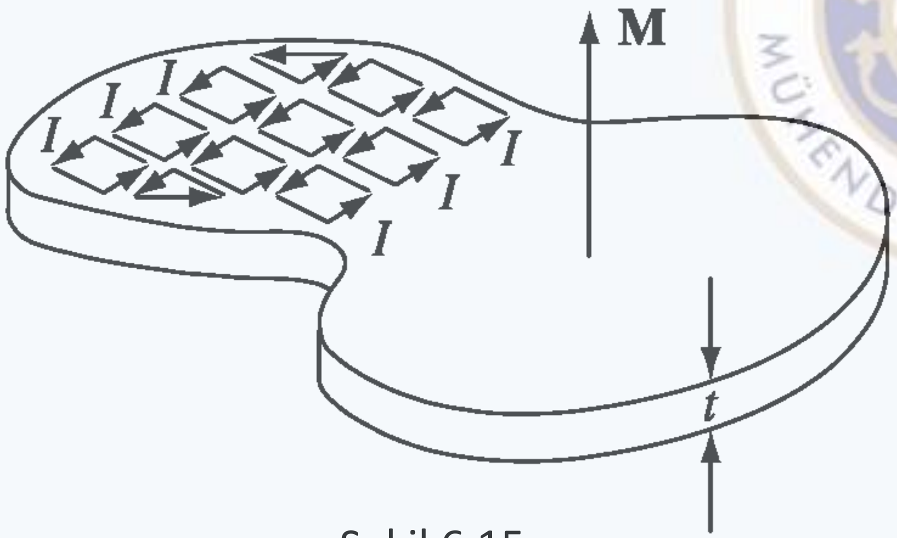
olarak elde etmiştiniz.

Kürenin dışarısındaki manyetik alan ise saf bir dipolünkü ile aynıdır:

$$\boldsymbol{m} = \frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{M}$$

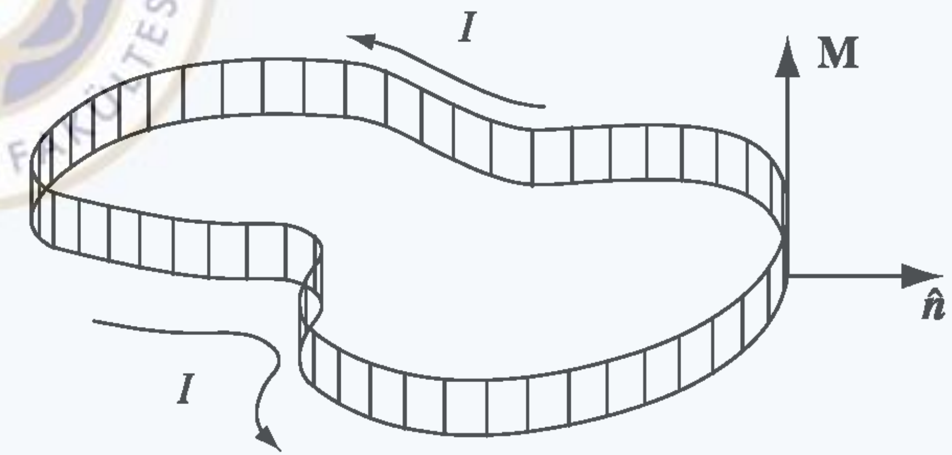
6.2.2 Bağlı Akımların Fiziksel Yorumu

- Bağlı akımların (J_b ve K_b) fiziksel olarak nasıl ortaya çıktıklarına bakalım. Düzgün olarak mıknatıslanmış ince bir malzeme dilimini düşününüz (şekil 6.15). Dipoller küçük akım halkaları ile temsil edilmiştir. İç taraftaki akımlar birbirini yok eder. Ancak kenarda yok etme olmadığından şekil sınır etrafında akan tek bir I akım şeridine eşdeğer olur (şekil 6.16)



Şekil 6.15

=

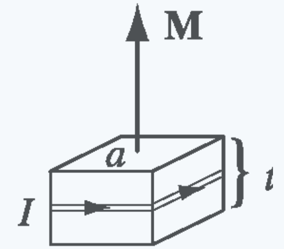


Şekil 6.16

M cinsinden bu akım nedir?

Çok küçük akım halkalarından her birinin alanı *a* ve kalınlığı *t* olsun. M mıknatıslanması cinsinden dipol momenti *m=Mat*'dir. Bunula birlikte dolaşan *I* akımı cinsinden *m=Ia* yazılabilir.

O hacimdeki dipol momenti: Birim hacimdeki dipol moment$\times$ hacim



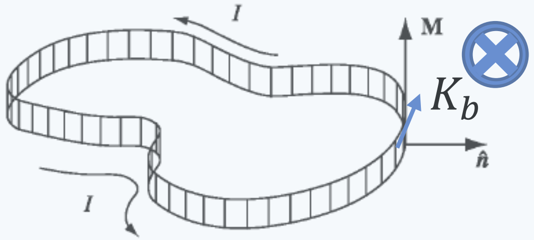
$$m=Mat=Ia$$

$$I=Mt$$

Yüzey akımı $\boldsymbol{K}_b=I/t=M$'dir.

Dışarı doğru çizilmiş birim vektör $\hat{n}$ kullanılarak,

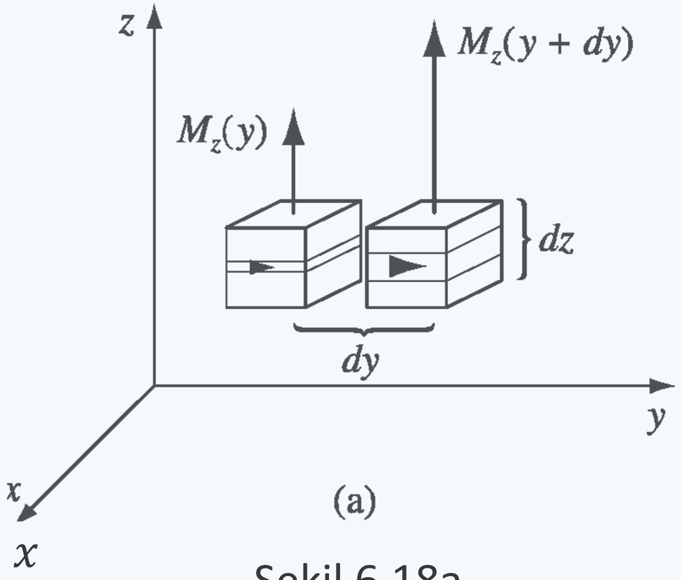
$$K_b = M \times \hat{n}$$



Dilimin üst ve altında K_b yüzey akımı yoktur çünkü $M // \hat{n}$

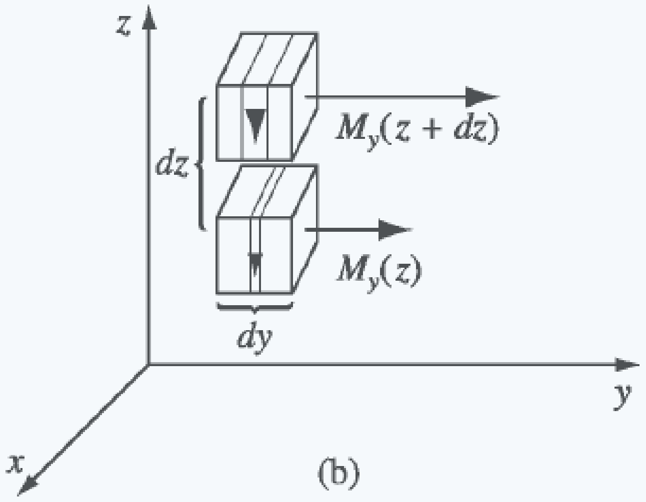
Her bir yük belirli atoma bağlı olduğundan **bağlı akım** da denilebilir.

Mıknatıslanma düzgün olmadığı zaman iç akımlar artık birbirini yok etmezler. Şekil 6.18a bitişik durumdaki iki mıknatıslanmış malzeme topağını göstermektedir. Birisi üzerindeki sağa doğru daha büyük olan ok o noktada mıknatıslanmanın daha büyük olduğunu göstermektedir. İki topağın kavuştuğu yüzeyde *x* yönünde net bir akım vardır:



Şekil 6.18a

$$I_x = [M_z(y + dy) - M_z(y)]\,dz = \frac{\partial M_z}{\partial y}\,dy\,dz$$



Şekil 6.18b

$$I_x = [M_z(y+dy) - M_z(y)]\,dz = \frac{\partial M_z}{\partial y}\,dy\,dz$$

Karşılık gelen hacim akımı yoğunluğu: $(J_b)_x = \dfrac{\partial M_z}{\partial y}$

y doğrultusundaki düzgün olmayan bir mıknatıslanma ise $\partial M_y/\partial z$ miktarı kadar bir katkı getirir (şekil 6.18b).

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

O halde genel halde:

$$\boxed{\boldsymbol{J}_b = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}}$$

elde edilir. $\boldsymbol{J}_b$ kararlı bir akım olduğundan korunum yasasına uymalıdır:

Süreklilik denklemi: $\nabla . J_b = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, ρ=0 olduğundan $\nabla . Jb$ =0

Bir rotasyonelin diverjansı her zaman sıfırdır: $\nabla . (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}) = 0$ olduğundan $\nabla . \boldsymbol{J}_b = 0$'dır. Korunum yasasına uymaktadır.

6.2.3 Madde İçinde Magnetik Alan

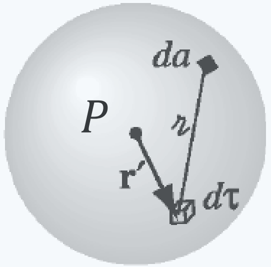
- Elektrik alan gibi madde içindeki mikroskobik magnetik alan da noktadan noktaya ve zamanla dalgalanır. Madde içindeki magnetik alandan bahsederken makroskobik alanı kastederiz. Bu durumda çok sayıda atom içerecek kadar yeterince büyük bölgeler üzerinden ortalama alınır.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

- Problem 6.11: Kesim 6.2.1'de mükemmel bir dipolün potansiyeli (Denk.6.10) ile başladık, öte yandan gerçekte biz fiziksel dipollerle ilgileniriz. Bizim yine de doğru makroskobik alanı elde ettiğimizi gösteriniz.

- **Çözüm:** $B = B_{out} + B_{in}$'un ortalamasını elde etmek istiyoruz. B_{out} P noktası civarında küçük kürenin dışındaki moleküllerden, B_{in} ise küre içindeki moleküllerden kaynaklanır. B_{out}'un ortalaması merkezdeki alan ile aynıdır (Prob. 5.59b). Bu sebeple Denk. 6.10'u kullanmak uygundur. Merkez tüm moleküllerden uzaktadır.

$$\mathbf{A}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{dışarda}} \frac{\mathbf{M}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^{2}}\,d\tau$$



$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$< B_{iç}> = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{R^3} = \frac{2\mu_0 m}{3}$$

$\boldsymbol{A}_{dış}$'dan dışarı çıkan **B** alanı $\mathbf{B}_{iç}$ tarafından sağlanmaktadır.