BÖLÜM 7
Elektrodinamik

Doç. Dr. Fulya Bağcı

Ankara Üniversitesi,

Fizik Mühendisliği Bölümü

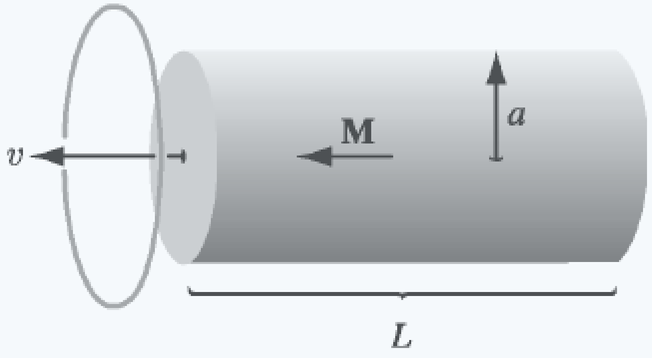
01.04.2021

7.2.1 Faraday Yasası

7.2.3 İndüktans

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:
Elektromagnetik Teori, David J. Griffiths, Gazi Kitabevi (Çeviri: Prof. Dr. Basri Ünal)

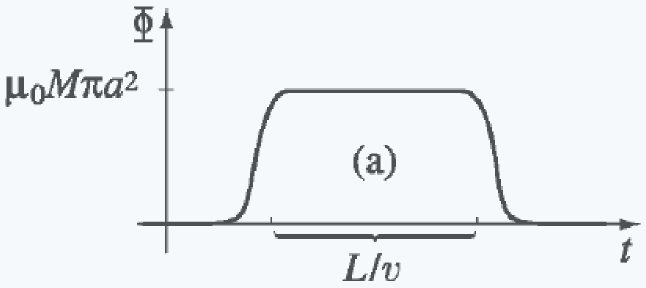
Örnek 7.5: L uzunluğunda ve a yarıçapında uzun silindirik bir mıknatıs eksenine paralel düzgün bir **M** mıknatıslanması taşımaktadır. O hafifçe daha büyük çaplı dairesel bir telin arasından sabit ϑ hızıyla geçiyor (Şek.7.21). Halkada indüklenen emk'yı zamanın fonksiyonu olarak çizitleyiniz.



Şek.7.21

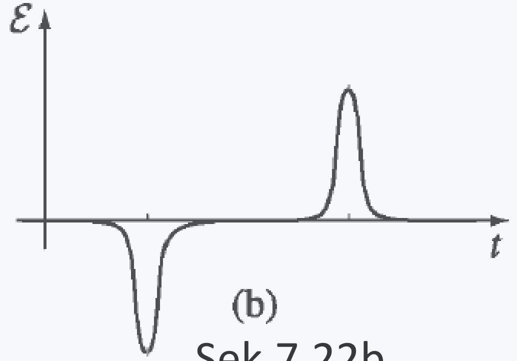
Çözüm: Magnetik alan yüzey akımı $\boldsymbol{K}_b = M\widehat{\emptyset}$ olan uzun bir solenoidinki ile aynıdır. Böylece alanın etrafa yayılmaya başladığı uç kısımlar dışında içerideki alan

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{M}$$



Şek.7.22a

Mıknatıs çok uzakta iken halkadan geçen akı sıfır olup mıknatısın ön ucu halkadan geçtikten sonra en büyük $\mu_0 M \pi a^2$ değerine kadar yükselir ve mıknatısın arka ucu geçip gittikten sonra tekrar sıfıra düşer (Şek. 7.22). Emk Φ'nin zamana göre türevinin eksilisidir. O halde Şek. 7.22b'de gösterildiği gibi iki sivriltiden oluşur.



Şek.7.22b

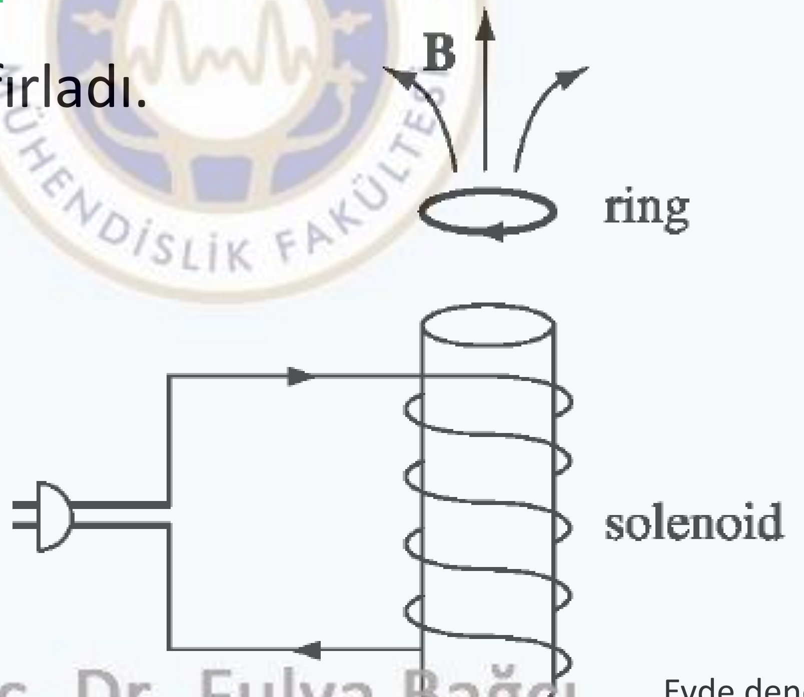
- Örnek 7.5'de indüklenmiş akımın halkadan hangi yönde akacağını bilmek isteyebilirsiniz. Sağ el kuralı ilkesel olarak iş yapar (Şek. 7.22a'da sola doğru Φ'yi pozitif saydık, böylece soldan bakıldığında akım için pozitif yön saat yönünün tersidir; Şek. 7.22b'de birinci sivrilti negatif olduğu için ilk akım darbesi saat yönünde akar ve ikincisi ise saat yönünün zıddına akacaktır). Fakat tek amacı sizin yönelimleri doğru bulmanıza yardım etmek olan Lenz yasası denilen kullanışlı bir kural vardır.
- İndüklenmiş akım kendisinin oluşturacağı akı esas akıdaki değişmeyi yok etmeye çalışacak bir yönde akar. Örnek 7.5'deki mıknatısın ön ucu halkaya girerken akı artar, böylece halkadaki akım sağa doğru bir alan üretmelidir. Bu nedenle saat yönünde akar. Doğanın nefret ettiği şeyin akının kendisi değil, akıdaki değişme olduğuna dikkat ediniz (Mıknatısın kuyruk ucu halkadan çıktığında akı azalır, bu yüzden onu yerine getirmeye gayret eden indüklenmiş akım saat yönünün tersine akar.)

Faraday yasası bir çeşit eylemsizlik olgusudur. İletken bir halka içerisinden sabit akıyı sürdürmekten hoşlanır; akıyı değiştirmeye çalışırsanız halka sizin çabalarınızı boşa çıkaracak bir yönde akım göndererek size karşılık verir. İndüklenmiş akım tarafından oluşturulan akı tipik olarak orijinal akının yalnızca çok küçük bir kesridir. Lenz yasası size akışın yönünü söyler.

Zıplayan halka gösteri deneyi

Halka havaya fırladı.

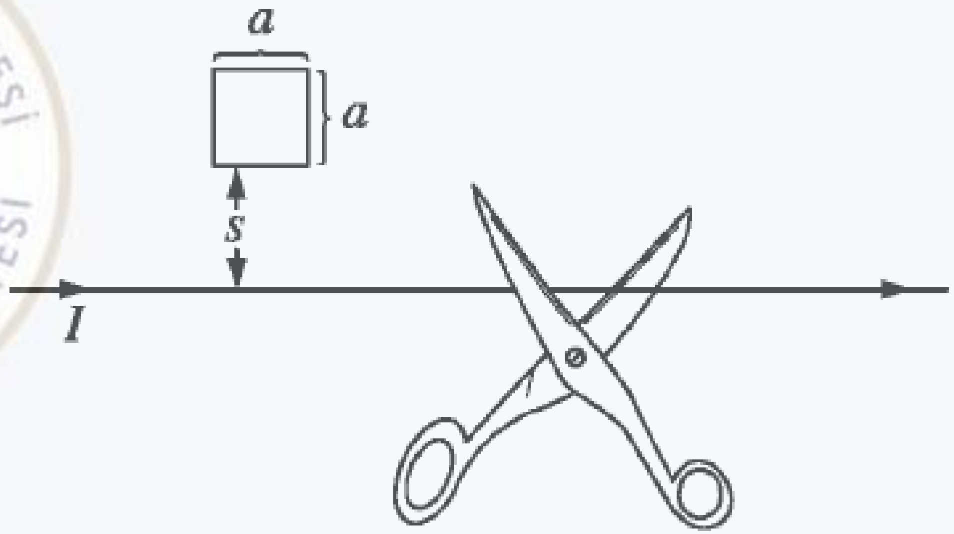
Niçin?



Evde denerken dikkatli ol.

Örnek 7.18: Kenarı a direnci R olan bir kare halka I akımı taşıyan sonsuz uzunluktaki düz bir telden bir s uzaklığında bulunuyor (Şek. 7.28). Şimdi birisi teli kesiyor, böylece I sıfıra düşüyor. Kare halkada indüklenen akım hangi yönde akar ve bu akımın aktığı süre içerisinde halkanın bir noktasından geçen toplam yük ne kadardır? Makas modelini sevmiyorsanız akımı yavaş yavaş kapatınız:

$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I & 0 \le t \le \frac{1}{\alpha} \text{ için}, \\ 0 & t \ge \frac{1}{\alpha} \text{ için} \end{cases}$$



Şek.7.28

Çözüm:

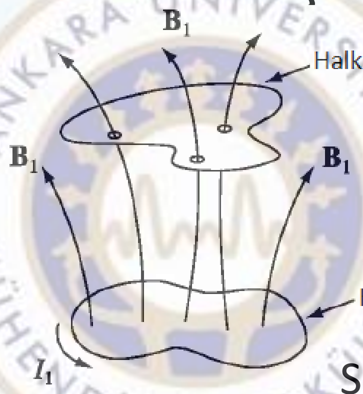
- $\Phi = \int \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$
- $\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_s^{s+a}\frac{ds'}{s'} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{s+a}{s}$
- $\varepsilon = I_{halka}R = \frac{dQ}{dt}R = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{s}\right)\frac{dI}{dt}$
- $dQ = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{a}{s}\right)dI$
- $Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{a}{s}\right)$

Telden kare halkadan kaynaklanan magnetik alan sayfa düzlemi dışına doğrudur ve zamanla azalmaktadır. Dolayısıyla indüklenen akımın yarattığı magnetik alanın sayfa düzlemi dışına doğru olması için akım saat yönünün tersi yönde yönelmelidir.

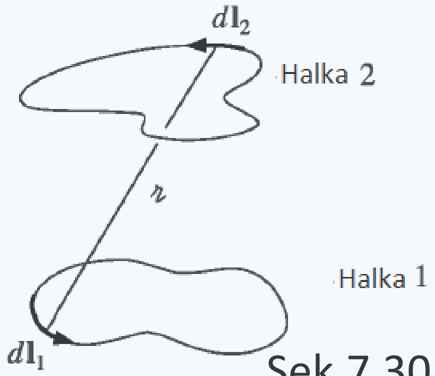
7.2.3 İndüktans

- Durmakta olan iki akım halkanız olduğunu varsayınız (Şek.7.29). Halka 1 etrafında I akımını geçirirseniz o bir B_1 magnetik alanını oluşturur. Alan çizgilerinin bazıları halka 2 içinden geçer. B_1'in 2'den geçirdiği akı Φ_2 olsun. B_1'i gerçekten hesaplamak için çok zorluk çekebilirsiniz, fakat

- $\boldsymbol{B_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{dl_1 \times \hat{\boldsymbol{\mathfrak{r}}}}{\boldsymbol{\mathfrak{r}}^2}$



Şek.7.29



Şek.7.30

- Biot-Savart yasasına bir göz atmak bu alan hakkında önemli bir gerçeği ortaya koyar: O I_1 akımıyla orantılıdır. Bundan dolayı halka 2'den geçen akı da I_1 ile orantılı olacaktır.

- $\Phi_2 = \oint \boldsymbol{B_1}.\, d\boldsymbol{a}_2$

- Böylece
- $\Phi_{\mathbf{2}} = M_{21} I_1$
- Burada M_{21} orantı sabitidir, o iki halkanın karşılıklı indüktansı olarak bilinir.
- Akıyı vektör potansiyeli cinsinden ifade ederek ve Stokes teoreminden faydalanarak karşılıklı indüktans için türetebileceğimiz kısa bir formül vardır:
- $\Phi_{\mathbf{2}} = \int \boldsymbol{B_1}\, d\boldsymbol{a}_2 = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}_1)\, d\boldsymbol{a}_2 = \oint \boldsymbol{A_1}.\, d\boldsymbol{l}_2$
- Şimdi Denklem 5.63'e göre
- $\boldsymbol{A_1} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$
- Buradan $\Phi_{\mathbf{2}} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \right) d\boldsymbol{l}_2$
- Açıkça $M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\boldsymbol{l}_1 d\boldsymbol{l}_2}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$
- Bu Neumann formülüdür; o çift integralle ilgilidir – bir integral halka 1 etrafında diğer integral de halka 2 etrafındadır (Şekil 7.30). O pratik hesaplamalar için çok faydalı değildir, fakat karşılıklı indüktans hakkında iki önemli şeyi ortaya koyar:

1. M_{21} iki halkanın büyüklükleri, şekilleri ve bağıl konumları ile ilgili saf geometrik bir niceliktir.

2. Halka 1 ve 2'nin rollerini değiştirdiğimizde Denklem 7.22'deki integral değişmez; buradan

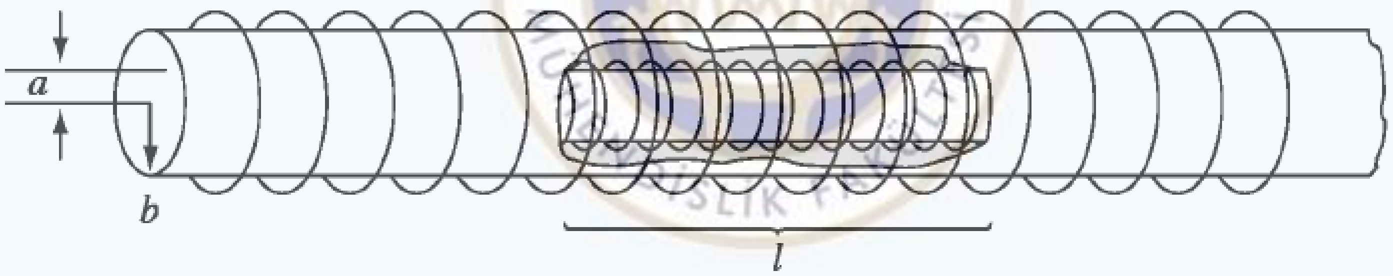
$$M_{21} = M_{12}$$

sonucu çıkar.

Bu hayret verici bir sonuçtur. İki halkanın şekilleri ve konumları ne olursa olsun halka 1'den I akımını geçirdiğimizde halka 2 içinden geçen akı, aynı I akımını halka 2'den geçirdiğimiz zaman halka 1'den geçecek olan akıya özdeştir. Alt indisleri de bırakarak onların her ikisine M diyebiliriz.

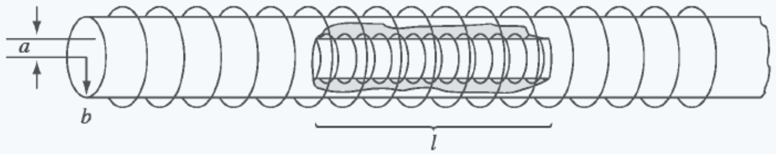
Örnek 7.10

Kısa bir solenoid (uzunluğu l ve yarıçapı a, birim uzunluğunda n_1 sarım bulunan) Şek. 7.31'de gösterildiği gibi çok uzun bir solenoidin (yarıçapı b, birim uzunluğunda n_2 sarım bulunan) ekseni üzerinde bulunmaktadır. Kısa solenoidin üzerinden I akımı geçiyor. Uzun solenoidden geçen akı nedir?



Şek. 7.31

- İçerideki solenoid çok kısa olduğundan karmaşık bir B'si var. Dış solenoidin her sarımından farklı I geçirir. Bu yolla hesaplamak çok güçtür. Ancak karşılıklı indüktansların eşitliğinden çok kolay hesaplanabilir. Tersi duruma bakalım: Dış solenoidden I akımı geçirelim. İç solenoidden geçen akıyı hesap edelim. Uzun solenoid içindeki alan sabittir ve değeri:
- $B = \mu_0 n_2 I$



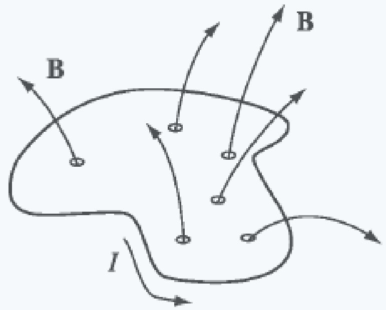
- Kısa solenoidin tek halkasından geçen akı
- $B\pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$
- Toplam n_1 tane sarım olduğundan iç solenoidden geçen akı

$$\Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l I$$

- Bu aynı zamanda kısa solenoidden geçen akımın uzun solenoidden geçireceği akıdır. Cevap budur.
- Karşılıklı indüktans

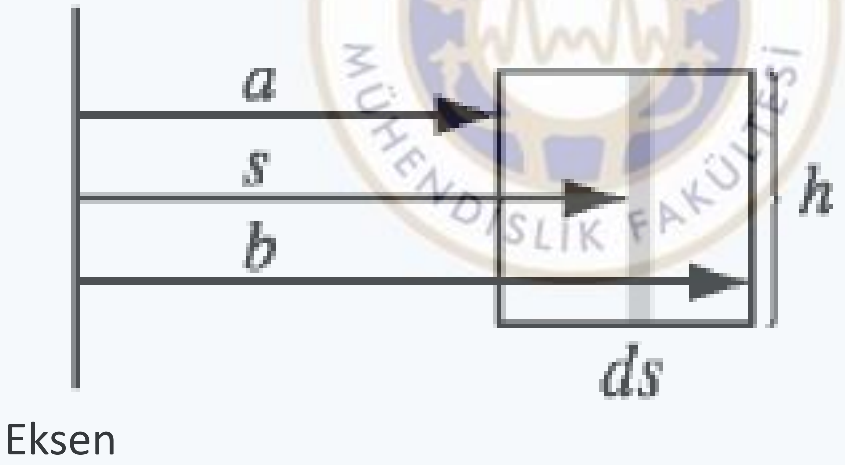
$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l$$

- Şimdi halka 1'deki akımı değiştirelim. Halka 2'den geçen akı değişir. Değişen akı halka 2'de bir emk indükler (Faraday yasası):
- $\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$
- Halka 1 deki akımı değiştirdiğimizde her defasında halka 2 de indüklenmiş akım akar (onları birleştiren bir tel olmamasına rağmen)
- Değişen akım kaynak halkanın kendisinde de emk indükler. Alan ve akı akım ile orantılıdır:
- $\Phi = LI$
- Orantılılık sabiti L'ye halkanın öz indüksiyon veya basitçe indüksiyon katsayısı denir. Halkanın geometrisine bağlıdır (M gibi).
- Akım değişirse halkada indüklenen emk
- $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$
- L indüktansı henri cinsinden ölçülür. Amper başına 1 volt saniyedir.



Örnek 7.11

- Dikdörtgen enine kesitli toroid şeklinde bir bobin
- İç yarıçapı a, dış yarıçapı b, yükseklik h, toplam sarım sayısı N
- Öz indüksiyon katsayısı nedir?



- Toroidin içindeki magnetik alan
- (5.60)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}$$

- Tek bir sarmaldan geçen akı

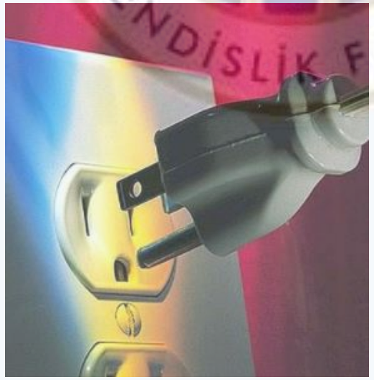
$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h \int_a^b \frac{1}{s}\, ds = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Toplam akıyı bulmak için N ile çarparız.
- Öz indüktans

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- İndüktans da kapasitans gibi hep pozitif bir niceliktir. Lenz yasası emk'nın akımdaki herhangi bir değişikliğe karşı koyacak bir yönde olmasını zorunlu kılar. Bu sebeple o *zıt emk* olarak adlandırılır.
- Bir teldeki I'yı değiştirmek için bu zıt emk'ya karşı savaşırız.
- Kütlenin mekanik sistemlerdeki rolünün benzeri elektrik devrelerinde indüktans ile oynanır.
- L büyükse akımı değiştirmek daha zordur. Kütle büyükken cismin hızının daha zor değiştirilmesi gibi.

- Bir halka etrafında I akımı akmaktayken birisi teli aniden kessin. Akım bir anda sıfır olur. Bu büyük bir emk üretir. Çünkü I küçük de olsa dI/dt devasadır. Ütü veya tost makinesi prizden çekilirken bu sebeple bir kıvılcım görebilirsiniz. Elektromagnetik indüksiyon devredeki açıklığı atlasa bile var gücüyle akımı sürdürmek ister. Tost makinesini veya ütüyü prize takarken ise indüksiyon hızlı bir artış yerine akımda düzgün bir artış ister.



Örnek 7.12 Sabit bir ϵ_0 emk'sına sahip bir bataryanın direnci R ve indüktansı L olan bir devreye bağlandığını düşünün. Devreden geçen akım nedir?

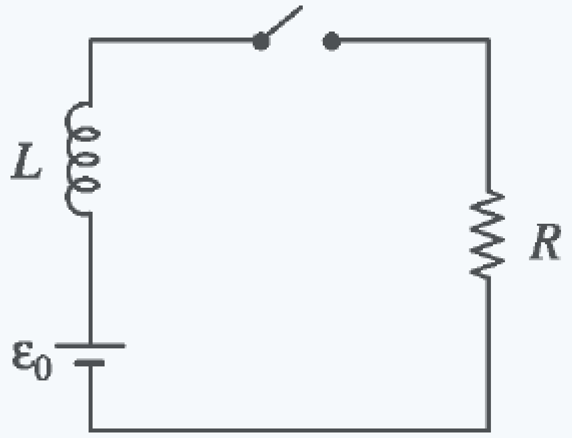
Çözüm: Devredeki emk batarya ve indüktans tarafından sağlanır. Ohm yasasına göre

- $\epsilon_0 - L\dfrac{dI}{dt} = IR$
- I zamanın fonksiyonudur. Bu 1. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

Genel çözüm: $I(t) = \dfrac{\epsilon_0}{R} + ke^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$

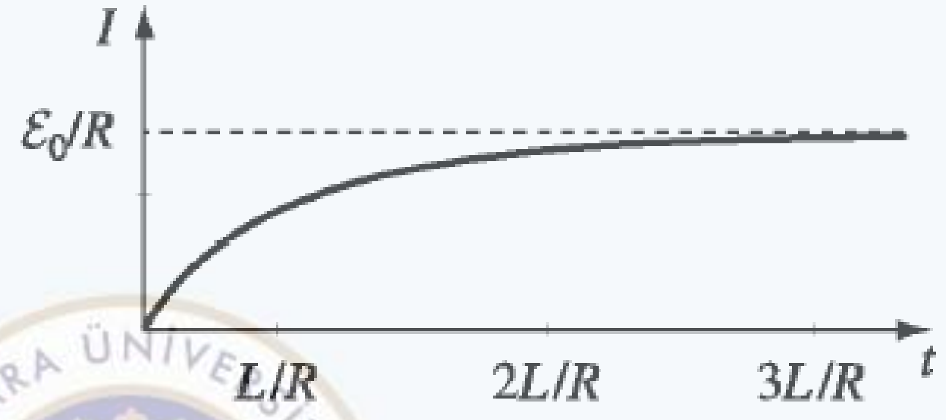
olup k başlangıç koşullarından belirlenen bir sabittir. Devre $t = 0$'da prize takılmışsa $I(0) = 0$'dır ve $k = -\dfrac{\epsilon_0}{R}$'dir.

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$$



elde edilir.

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$$



- Devrede hiçbir indüktans olmasa idi akım derhal ϵ_0/R değerine atlayacaktı. Uygulamada her devrenin bir miktar öz indüktansı vardır.
- Akım ϵ_0/R'ye asimptotik olarak yaklaşır.
- $\tau \equiv L/R$ niceliğine zaman sabiti adı verilir. O bize akımın en son değerinin kabaca iki bölü üçüne ulaşması için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini söyler.

Problem 7.24

R yarıçaplı, birim uzunluğunda n sarım bulunan uzun bir solenoidin birim uzunluk başına öz indüktansını bulunuz.

Çözüm: $B = \mu_0 n I$

Tek bir çevrimden geçen akı: $\Phi_1 = \mu_0 n I \pi r^2$

l uzunluğunda bir solenoidde nl tane çevrim olacağından toplam akı:

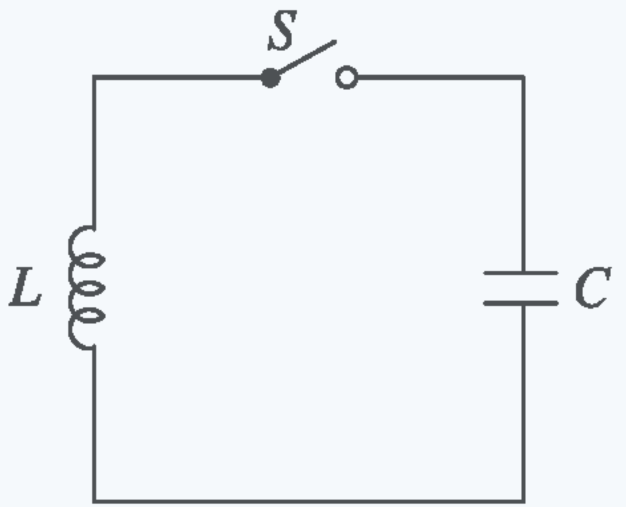
$$\Phi = \mu_0 n^2 \pi R^2 I l$$

Öz indüktans $\Phi = LI$ ile verildiğinden birim uzunluktaki öz indüktans:

$$\mathcal{L} = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

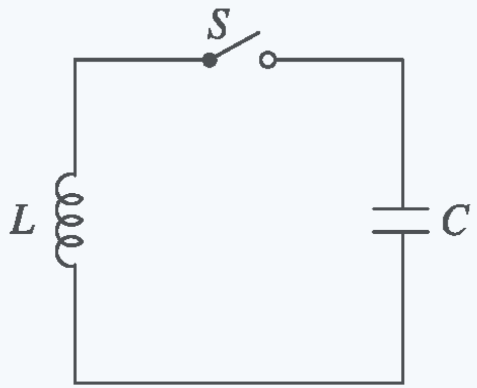
Problem 7.25

Bir C kapasitörü bir V potansiyeline kadar yükleniyor ve şekilde gösterildiği gibi bir L indüktörüne bağlanıyor. S anahtarı $t = 0$ anında kapatılıyor. Devredeki akımı zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz. C ve L ile seri olarak bir R direnci eklenirse yanıtınız nasıl değişir?



Çözüm: I saat yönünde aktığında $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}$

Q kapasitör üzerindeki yüktür. $I = \frac{dQ}{dt}$ olduğundan



$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q = -\omega^2 Q \qquad \left\{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right\}$$

Q için genel çözüm $Q = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$I(t) = -A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$t = 0$'da $I = 0$ -> $B = 0$ olmalıdır.

$$I(t) = -CV\omega\sin\omega t = -V\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Bir direnç koyarsanız, salınım "sönümlenir". Bu durumda

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} + IR \quad \text{->} \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Q'nun birinci türevi sönümlenme ile ilişkilidir.