Problem 7.34

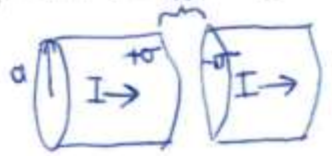
Problem 8.2

/ a yarıçaplı geniş bir tel düzgün bir biçimde dağılmış I akımı taşımaktadır. Teldeki $w \ll a$ olan dar bir aralık şekil'de görüldüğü gibi paralel plakalı bir kapasitör oluşturmaktadır. $w \ll a$'dır. (Eksenden uzaklığı "s" olmak üzere $s<a$ olmak üzere aralıktaki manyetik alanı bulunuz.) (a) Aralıktaki elektrik ve manyetik alanları eksenden olan s uzaklığının ve t zamanının fonksiyonları olarak bulunuz. ($t=0$'da yük sıfırdır.) (b) Aralıktaki u_{em} enerji yoğunluğunu ve $\vec{S}$ Poynting vektörünü bulunuz. Özellikle $\vec{S}$'nin yönelimine dikkat ediniz.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{mek} + u_{em}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S} \qquad (8.14)$$

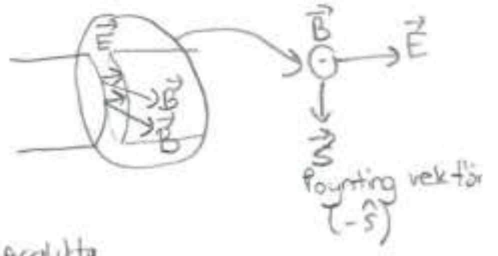
Denklem (8.14)'ün sağlandığını doğrulayınız.

(c) Aralıktaki toplam enerjiyi zamanın bir fonksiyonu olarak tayin ediniz. Poynting vektörünün uygun bir yüzey üzerinden integralini olarak aralığın içine doğru akan toplam gücü hesaplayınız. Giren gücün, aralıktaki enerjinin artış hızına eşit olduğunu doğrulayınız. (İşlemi aralığın iyice içinde $b<a$ olan hacim için yapınız.)



(a) $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$ $\quad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$ $\quad Q(t) = It$

$\sigma = \frac{It}{\pi a^2}$



$$\boxed{\vec{E}(t) = \frac{It}{\pi a^2 \varepsilon_0}\hat{z}}$$

Aralıkta

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \underbrace{\int \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{=0} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

$$B \cdot 2\pi s = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\pi s^2 \rightarrow \boxed{\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

$$B \cdot 2\cancel{\pi} s = \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{I\cancel{\pi} s^2}{\pi a^2 \cancel{\varepsilon_0}}$$

(b) $u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \left(\frac{It}{\pi \varepsilon_0 a^2}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{\varepsilon_0} \frac{I^2 t^2}{\pi^2 \varepsilon_0^{\cancel{2}} a^4} + \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \frac{\mu_0 \cancel{\mu_0^2} I^2 s^2}{4\pi^2 a^4}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left[\frac{I^2}{\pi^2 a^4}\left(\frac{t^2}{\varepsilon_0 \mu_0} + \frac{\cancel{\mu_0} s^2}{4}\right)\right] = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4}\left[(ct)^2 + (s/2)^2\right]$$

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} t^2 I^2}{\pi^2 a^4 \varepsilon_0} = \frac{t^2 I^2}{\varepsilon_0 \pi^2 a^4}$$

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s S_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial \cancel{S_\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \cancel{S_z}}{\partial z}$$

0 $\quad$ 0

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{It}{\pi \varepsilon_0 a^2}\right)\left(\frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\right)(-\hat{s})$$

$$\vec{S} = -\frac{I^2 t}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4}\, s\,\hat{s}$$

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s \frac{I^2 t s}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4}\right) = \frac{1}{s}\cdot\frac{I^2 t}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4}\frac{d}{ds}(s^2)$$

$$= \frac{\cancel{2} I^2 t}{\cancel{2}\pi^2 \varepsilon_0 a^4} = \frac{I^2 t}{\varepsilon_0 \pi^2 a^4}$$

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

$$\frac{t^2 I^2}{\varepsilon_0 \pi^2 a^4} = \frac{I^2 t}{\varepsilon_0 \pi^2 a^4}$$

$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$ olduğu gösterilmiştir.

(c) $U_{em} = \int u_{em} \cdot w \cdot 2\pi s \, ds$

$$= \cancel{2\pi} w \, \frac{\mu_0 I^2}{\cancel{2}\pi^{\cancel{2}} a^4} \int_0^b \left[(ct)^2 + (s/2)^2 \right] s \, ds$$

$$= \frac{\mu_0 w I^2}{\pi a^4} \int_0^b \left[(ct)^2 \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4} \frac{s^4}{4} \right] \Bigg|_0^b$$

$$U_{em}(t) = \frac{\mu_0 w I^2 b^2}{2\pi a^4} \left[(ct)^2 + \frac{b^2}{8} \right]$$

$$P_{in} = -\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{I^2 t}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4} \left[b\hat{s} \cdot 2\pi b w \hat{s} \right]_{s=b}$$

$$= \frac{I^2 w t b^2}{\pi \varepsilon_0 a^4}$$

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{\mu_0 w I^2 b^2}{\cancel{2}\pi a^4} \cancel{2} c^2 t = \frac{I^2 w t b^2}{\pi \varepsilon_0 a^4} = P_{in} \checkmark$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$