13. HAFTA

Kitle Ortalaması Hakkında Büyük Örneklem Sonuç Çıkarımları

Örneklem çapı büyük olduğunda, normallik varsayımları sağlanmasa da $\underline{\mu}$ için hipotez testleri ve güven bölgeleri oluşturulabilir. Örneklem çapı n değeri büyük olduğunda, örneklemin alındığı kitlenin dağılımı kesikli olsa da, kitle ortalaması için sonuç çıkarımı yapılabilir.

Büyük örneklemin avantajı, sadece örneklem ortalama vektörü $\underline{\bar{X}}$ ve örneklem varyans-kovaryans matrisi S gibi temel istatistiklerin kullanılması ile kaybolan örneklem bilgisini dengeler. Diğer taraftan $\underline{\bar{X}}$ ve S istatistikleri normal kitleler için yeterli istatistikler olduğundan, dağılım çok değişkenli normal dağılıma yakın olduğunda sonuç çıkarımlarında daha etkin örneklem bilgisinden faydalanılacaktır.

$\underline{\mu}$ hakkındaki bütün büyük örneklem sonuç çıkarımları χ^2 dağılımına bağlıdır.

$$(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu})'\left(\frac{S}{n}\right)^{-1}(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu}) = n(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu})$$

ifadesinin dağılımı yaklaşık olarak p serbestlik dereceli χ^2' dir. Buradan

$$P[n(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu}) \le \chi^2_p(\alpha)] \cong 1-\alpha$$

dır.

Sonuç: $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$, ortalama vektörü $\underline{\mu}$ ve pozitif tanımlı varyans-kovaryans matrisi Σ olan bir kileden rasgele bir örneklem olsun. n ve $(n-p)$ büyük olduğunda, $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin, $H_1 : \underline{\mu} \ne \underline{\mu}_0$ hipotezine karşı α anlam düzeyli yaklaşık testinde

$$n(\underline{\bar{\mathrm{x}}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\bar{\mathrm{x}}}-\underline{\mu}) > \chi^2_p(\alpha)$$

ise H_0 hipotezi reddedilir.

Bu test daha önce normallik varsayımı sağlandığında verilen $T^2 = n(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\bar{X}}-\underline{\mu})$ istatistiği ile karşılaştırıldığında, test istatistiklerinin yapısı aynı ancak kritik değerler farklıdır. n ve $(n-p)$ yeterince büyük olduğunda, bu iki kritik değer yaklaşık aynı olacaktır.

Sonuç: $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$, ortalama vektörü $\underline{\mu}$ ve pozitif tanımlı varyans-kovaryans matrisi Σ olan bir kileden rasgele bir örneklem olsun. n ve $(n-p)$ büyük olduğunda,

$$\underline{l}'\,\underline{\mathrm{x}} \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\,\sqrt{\frac{\underline{l}'S\underline{l}}{n}}$$

aralığı $(1-\alpha)$ yaklaşık olasılığı ile her $\underline{l}$ için $\underline{l}'\underline{\mu}$'yü içerir.

Sonuç olarak $(1-\alpha)$'lık eşanlı güven aralığı ifadeleri

$$\bar{x}_1 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \quad \mu_1\text{'i içerir}$$

$$\bar{x}_2 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \quad \le \mu_2\text{'yi içerir}$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}_p \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \quad \le \mu_p\text{'yi içerir}$$

olarak elde edilir. Bununla birlikte, her (μ_i, μ_k) ; $i,k = 1,2,...,p$ çifti için örneklem ortalama merkezli elipsler

$$n[\bar{x}_i - \mu_i \quad \bar{x}_k - \mu_k]\begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ik} \\ s_{ik} & s_{kk} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{x}_i - \mu_i \\ \bar{x}_k - \mu_k \end{bmatrix} \le \chi_p^2(\alpha)\,,\ (\mu_i, \mu_k)\text{'yı içerir.}$$

Örnek : Bir müzik öğreticisi Fillandiya'daki, Finli öğrencilerin yerli müzik alışkanlıklarını araştırmıştır. 12 yaşındaki 96 Finli öğrencinin 7 değişkene ilişkin gözlem değerlerine ait temel istatistikler aşağıdaki gibidir:

	$\bar{x}_i$	s_{ii}
X_1 :Ezgi, Hava	28.1	5.76
X_2 :Ses uyumu	26.6	5.85
X_3 :Tempo(tarz)	35.4	3.82
X_4 :Ölçü	34.2	5.12
X_5 :Deyim kurma tarzı	23.6	3.76
X_6 :Denge	22.0	3.93
X_7 :Stil	22.7	4.03

Bireysel μ_i , $i=1,2,...,7$ ortalama bileşenleri için %90 eşanlı güven aralıklarını elde ediniz.

Çözüm : Burada $1-\alpha=0.90$ ve $\alpha=0.10$ olur. Böylece %90 eşanlı güven sınırları

$$\bar{x}_i \pm \sqrt{\chi_7^2(0.10)}\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \quad ; \quad i=1,2,...,7$$

ifadesinden elde edilir. Burada $\chi_7^2(0.10)=12.02$ dir. Eşanlı güven aralıkları sırasıyla,

$$\mu_1 \text{ için; } 28.1 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{5.76}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 26.06 \le \mu_1 \le 30.14$$

$$\mu_2 \text{ için; } 26.6 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{5.85}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 24.53 \le \mu_2 \le 28.67$$

$$\mu_3 \text{ için; } 35.4 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{3.82}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 34.05 \le \mu_3 \le 36.75$$

$$\mu_4 \text{ için; } 34.2 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{5.12}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 32.39 \le \mu_4 \le 36.01$$

$$\mu_5 \text{ için; } 23.6 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{3.76}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 22.27 \le \mu_5 \le 24.93$$

$$\mu_6 \text{ için; } 22.0 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{3.93}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 20.61 \le \mu_6 \le 23.39$$

$$\mu_7 \text{ için; } 22.7 \pm \sqrt{12.02}\,\frac{4.03}{\sqrt{96}} \quad \text{veya} \quad 21.27 \le \mu_7 \le 24.13$$

biçiminde elde edilir.

Amerikalı öğrencilerin yerli müzik alışkanlarına ilişkin ortalama vektör $\underline{\mu}_0' = [31 \quad 27 \quad 34 \quad 31 \quad 23 \quad 22 \quad 22]$ olmak üzere, Finli ve Amerikalı öğrenciler arasında fark var mıdır?

Amerikalı öğrencilerin $\underline{\mu}_0$ ortalama vektörünün Ezgi, Tarz ve Ölçü bileşenleri, Finli öğrenciler için elde edilen aralıkların dışında kaldığından; Amerikalı ve Finli öğrencilerin müzik alışkanlıkları farklıdır.

İki Çok Değişkenli Kitle Ortalama Vektörünün Karşılaştırılması

Bu kısımda iki bağımlı ve iki bağımsız kitlenin ortalamaları karşılaştırılacaktır.

Bağımlı İki Çok Değişkenli Kitle Ortalamasının Karşılaştırılması

Bağımlı iki kitlenin karşılaştırılmasına önce-sonra veya eş karşılaştırma da denmektedir. p boyutlu $\underline{X}$ rasgele vektörü için 2 deneme(önceki ve sonraki) ve n tane deneysel birim sözkonusudur. Buradan j inci birim için iki bağımlı kitleye ilişkin veri yapısı;

X_{11j} : 1 inci deneme, 1 inci değişken

X_{12j} : 1 inci deneme, 2 inci değişken

$\vdots$

X_{1pj} : 1 inci deneme, p inci değişken

X_{21j} :2 inci deneme, 1 inci değişken

X_{22j} :2 inci deneme, 2 inci değişken

$\vdots$

X_{2pj} :2 inci deneme, p inci değişken

biçimindedir ve p tane eş karşılaştırmaya ilişkin rasgele değişkenler

$$
\begin{aligned}
D_{1j} &= X_{11j} - X_{21j} \\
D_{2j} &= X_{12j} - X_{22j} \\
&\vdots \\
D_{pj} &= X_{1pj} - X_{2pj}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$\underline{D}_j' = \left[D_{1j}, D_{2j}, \ldots, D_{pj} \right]$ olsun ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$E(\underline{D}_j) = \underline{\delta}$$
$$= \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_p \end{bmatrix}$$

ve

$$Cov(\underline{D}_j) = \Sigma_d$$

olduğu kabul edilsin. Eğer $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ ise, $\underline{D}_j \sim N_p(\underline{\delta}, \Sigma_d)$ dir. Buradan $\underline{D}_1, \underline{D}_2, ..., \underline{D}_n$, $N_p(\underline{\delta}, \Sigma_d)$ 'den bağımsız rasgele vektörler ise, $\underline{\delta}$ ortalama farkları vektörü hakkında sonuç çıkarımları T^2 istatistiğine göre yapılır.

Sonuç: $\underline{D}_1, \underline{D}_2, ..., \underline{D}_n$ farkları, $N_p(\underline{\delta}, \Sigma_d)$ kitlesinden rasgele bir örneklem olsun. Buradan $\underline{\delta}$ ve Σ_d ne olursa olsun

$$T^2 = n(\underline{\bar{D}} - \underline{\delta})' S_d^{-1} (\underline{\bar{D}} - \underline{\delta}) \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}$$

dir. Normallik varsayımı sağlanmadığında n ve $(n-p)$ ' nin her ikisi de yeterince büyük ise T^2 istatistiğinin dağılımı yaklaşık χ_p^2 'dir. Burada $\underline{\bar{D}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underline{D}_j$ ve $S_d = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (\underline{D}_j - \underline{\bar{D}})(\underline{D}_j - \underline{\bar{D}})'$ farklara ilişkin örneklem ortalama vektörü ve örneklem varyans-kovaryans matrisidir.

$D_{1j}, D_{2j}, ..., D_{pj}$ fark rasgele değişkenlerinin gözlem değerleri $\underline{d}'_j = \begin{bmatrix} d_{1j} & d_{2j} & \cdots & d_{pj} \end{bmatrix}$, $j = 1, 2, ..., n$ olsun. $\underline{D}_j \sim N_p(\underline{\delta}, \Sigma_d)$ olduğunda

$$H_0 : \underline{\delta} = \underline{0}$$
$$H_1 : \underline{\delta} \neq \underline{0}$$

hipotezinin testi için eğer

$$T^2 = n\ \underline{\bar{d}}'\ S_d^{-1}\ \underline{\bar{d}} > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$$

ise H_0 hipotezi reddedilir. Burada, $\underline{\bar{d}}$ ve S_d, $\underline{\bar{D}}$ ve S_d tahmin edicilerinin örneklemlerden elde edilen değerleridir.

Bununla birlikte $\underline{\delta}$ ortalama vektörün δ_i , $i=1,2,...,p$ bireysel ortalama farkları için $(1-\alpha)$ ’lık eşanlı güven aralıkları

$$\delta_i : \bar{d}_i \pm \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{d_i}^2}{n}} \quad , i=1,2,...,p$$

ile verilir. Burada $\bar{d}_i$, $\underline{\bar{d}}$ ’nin *i* inci elemanı ve $s_{d_i}^2$, S_d ’nin *i* inci diagonal elemanıdır.

n ve $(n-p)$ ’ nin her ikisi de yeterince büyük ise $\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) \cong \chi_p^2(\alpha)$ dir ve bu durumda normallik varsayımlarına ihtiyaç yoktur.

Örnek: (Alpar, 2009). Bir çocuk gelişim uzmanı A gibi bir hastalığa yakalanan çocukların kavrama ve denge düzeylerini verilecek bir eğitimle değişeceğini iddia etmektedir. Bu amaçla A hastalığına yakalanan çocuklardan 21 tanesini rasgele seçerek kavrama denge düzeylerini hem eğitimden önce, hem de eğitimden sonra gözleyerek aşağıdaki değerleri elde etmiştir. Eğitimin etkili olup olmadığını %5 anlam düzeyinde göre test ediniz. Eğer farklılık var ise farklılığı yaratan bileşeni belirleyerek, tüm sonuçlarınızı yorumlayınız.

	Eğitimden Önce		Eğitimden Sonra		Farklar	
Birimler	Kavrama (x_{11j})	Denge (x_{12j})	Kavrama (x_{21j})	Denge (x_{22j})	$d_{1j}=x_{11j}-x_{21j}$	$d_{2j}=x_{12j}-x_{22j}$
1	25	2.0	26	2.3	-1	-0.3
2	22	2.2	22	1.6	0	0.6
3	28	2.7	29	3.0	-1	-0.3
4	35	2.7	39	3.3	-4	-0.6
5	37	3.0	36	4.1	1	-1.1
6	48	1.0	51	1.7	-3	-0.7
7	49	2.7	48	3.3	1	-0.6
8	36	1.8	36	2.0	0	-0.2
9	42	2.0	43	2.4	-1	-0.4
10	40	3.4	42	2.9	-2	0.5
11	40	1.6	43	2.0	-3	-0.4
12	32	2.1	33	2.2	-1	-0.1
13	30	2.2	34	3.0	-4	-0.8

14	28	0.9	31	1.3	-3	-0.4
15	26	1.8	28	2.4	-2	-0.6
16	34	1.2	36	2.1	-2	-0.9
17	38	1.6	40	2.6	-2	-1.0
18	40	1.8	41	2.5	-1	-0.7
19	43	2.0	45	2.5	-2	-0.5
20	35	2.1	36	2.7	-1	-0.6
21	43	2.3	44	2.9	-1	-0.6

Çözüm:

$$H_0 : \underline{\delta} = \underline{0}$$
$$H_1 : \underline{\delta} \neq \underline{0}$$

olmak üzere öncelikle

$$T^2 = n\, \underline{\bar{d}}'\, S_d^{-1}\, \underline{\bar{d}}$$

değeri elde edilmelidir. Bunun için farklara ilişkin örneklem değerleri

$$\underline{\bar{d}} = \begin{bmatrix} -1.524 \\ -0.462 \end{bmatrix}, \quad S_d = \begin{bmatrix} 1.9619 & 0.0810 \\ 0.0810 & 0.1765 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } S_d^{-1} = \begin{bmatrix} 0.519554 & -0.23844 \\ -0.23844 & 5.77515 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} T^2 &= n\, \underline{\bar{d}}'\, S_d^{-1}\, \underline{\bar{d}} \\ &= 21\begin{bmatrix} -1.524 & -0.462 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.519554 & -0.23844 \\ -0.23844 & 5.77515 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.524 \\ -0.462 \end{bmatrix} \\ &= 21\begin{bmatrix} -0.68164 & -2.30473 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.524 \\ -0.462 \end{bmatrix} \\ &= 44.17 \end{aligned}$$

$p = 2$, $n = 21$ ve $\alpha = 0.05$ için tablo değeri

$$\begin{aligned} F_{p,n-p}(\alpha) &= F_{2,19}(0.05) \\ &= 3.52 \end{aligned}$$

dir ve buradan kritik değer

$$\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)=\frac{2(21-1)}{(21-2)}(3.52)$$
$$=7.41$$

olarak bulunur ve

$T^2 = 44.17 > 7.41$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve eğitim yönteminin etkili olduğu sonucuna varılır. Hipotezin reddine sebep olan bileşenin yani eğitimin kavrama ve denge düzeylerinin her ikisinde mi, yoksa sadece birinde mi etkili olup olmadığını görmek için $\underline{\delta}$'nın bileşenleri olan δ_1 ve δ_2 ortalama farkları için %95'lik eşanlı güven aralıkları elde edilmelidir. Buradan;

$$\delta_1 : (\bar{d}_1 \pm \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\ \sqrt{\frac{s_{d_1}^2}{n}}\ )$$
$$(-1.524 \pm \sqrt{7.41}\ \sqrt{\frac{1.9619}{21}})$$
$$(-2.356\ ;\ -0.692)$$

ve

$$\delta_2 : (\bar{d}_2 \pm \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\ \sqrt{\frac{s_{d_2}^2}{n}}\ )$$
$$(-0.462 \pm \sqrt{7.41}\ \sqrt{\frac{0.1765}{21}})$$
$$(-0.716\ ;\ -0.213)$$

dır. δ_1 ve δ_2 ortalama farkları için elde edile güven sınırları incelendiğinde, aralıkların her ikisi de H_0 hipotezinde iddia edilen "0" değerini içermemektedir. Bu da H_0 hipotezinin reddedilmesine her iki bileşeninde sebep olduğunu göstermektedir. Yani A hastalığına yakalanan çocuklara verilen eğitim, çocukların kavrama ve denge düzeylerinin gelişmesini sağlamıştır.