14. HAFTA

Bağımsız İki Çok Değişkenli Kitle Ortalamasının Karşılaştırılması

Bağımsız iki çok değişkenli kitlenin ortalama vektörlerinin eşitliği, tek değişkenli iki kitlenin ortalamalarının karşılaştırılmasına benzer biçimde yapılabilir. Burada $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ (veya $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0}$) olup olmadığı test edilecek. Eğer eşitlik doğru değil ise yani $\underline{\mu}_1 \neq \underline{\mu}_2$ (veya $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 \neq \underline{0}$) ise, hangi ortalama bileşenlerinin farklı olduğu araştırılacaktır.

Veri yapılarına ilişkin bazı varsayımlar söz konusudur.

$\underline{X}_{11}, \underline{X}_{12}, ..., \underline{X}_{1n_1}$ ve $\underline{X}_{21}, \underline{X}_{22}, ..., \underline{X}_{2n_2}$ örneklemleri sırasıyla ortalama vektörleri $\underline{\mu}_1$ ve $\underline{\mu}_2$, varyans-kovaryans matrisleri Σ_1 ve Σ_2 olan p-boyutlu bağımsız rasgele örneklemler olsun.

n_1 ve n_2 küçük olduğunda, her iki kitlenin çok değişkenli normal ve varyans-kovaryans matrislerinin eşit ($\Sigma_1 = \Sigma_2$) olması varsayımının da olması gerekir. Ancak $\Sigma_1 = \Sigma_2$ olması varsayımı, tek değişkenli durumdaki iki varyansın eşitliğine göre daha güçlü bir varsayımdır. Burada p tane varyans ve $\frac{p(p-1)}{2}$ tane kovaryans çiftinin eşit olduğu sağlanmalıdır. $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ olduğunda, her iki kitleden elde edilen örneklemlere bağlı olarak Σ'nın örneklemlerden elde edilen birleştirilmiş tahmin edicisi

$$S_{pooled} = \frac{(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2}{n_1+n_2-2}$$

dir. Burada

$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)(X_{ij} - \bar{X}_i)'}{n_i - 1} \quad , \; i = 1,2$$

Σ_i'nin tahmin edicisidir.

$H_0 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{\delta}_0$ hipotezi test edilmek istensin.

$$\begin{aligned} E(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) &= E(\underline{\bar{X}}_1) - E(\underline{\bar{X}}_2) \\ &= \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Cov(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) &= Cov(\underline{\bar{X}}_1) + Cov(\underline{\bar{X}}_2) - 2Cov(\underline{\bar{X}}_1, \underline{\bar{X}}_2) \\
&= Cov(\underline{\bar{X}}_1) + Cov(\underline{\bar{X}}_2) \\
&= \frac{1}{n_1}\Sigma + \frac{1}{n_2}\Sigma \\
&= (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\Sigma
\end{aligned}
$$

dır. Burada bağımsızlıktan dolayı $Cov(\underline{\bar{X}}_1, \underline{\bar{X}}_2) = 0$ dır.

S_{pooled}, Σ 'nın bir tahmin edicisi olduğundan, $(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})S_{pooled}$ da $(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\Sigma$ 'nın bir tahmin edicisidir.

Sonuç: $\underline{X}_{11}, \underline{X}_{12}, ..., \underline{X}_{1n_1}$, $N_p(\underline{\mu}_1, \Sigma)$ ve $\underline{X}_{21}, \underline{X}_{22}, ..., \underline{X}_{2n_2}$, $N_p(\underline{\mu}_2, \Sigma)$ dağılımlarından alınan bağımsız rasgele örneklemler olsun

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0} \\
H_1 &: \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 \neq \underline{0}
\end{aligned}
$$

hipotezinin testi için test istatistiği

$$
T^2 = \left[(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right]' \left[(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})S_{pooled}\right]^{-1} \left[(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right]
$$

dir ve bu istatistiğin dağılımı

$$
T^2 \sim \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - p - 1)} F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}
$$

dir. Buradan,

$$
c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{(n_1 + n_2 - p - 1)} F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\alpha)
$$

olmak üzere eğer $T^2 > c^2$ olur ise H_0 hipotezi reddedilir. Ayrıca

$$
P\left(\left[(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right]' \left[(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})S_{pooled}\right]^{-1} \left[(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right] \leq c^2 \right) = 1 - \alpha
$$

dır.

Örnek: İki farklı yöntemle imal edilen sabunlardan 50'şer adet kalıp rasgele alınmış ve sabunların köpük ($\overline{X}_1$) ve yumuşaklık ($\overline{X}_2$) değerleri gözlenmiştir. Bu gözlemlerden temel istatistikler

$$\underline{\mathrm{x}}_1 = \begin{bmatrix} 8.3 \\ 4.1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} 10.2 \\ 3.9 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ ve } S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir. Bu iki örneklemin alındığı kitlelerin normal ve Varyans-Kovaryans matrisleri eşit olduğu varsayımları altında;

a) iki kitle ortalamasının eşit olup olmadığını %95 güvenle test ederek, sonucu yorumlayınız.

b) $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2$ farkı için %95'lik güven bölgesini elde ederek, **a)** şıkkı ile karşılaştırınız.

Çözüm:

a)

$$H_0 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0}$$
$$H_1 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 \neq \underline{0}$$

Hipotezinin testi için

$$T^2 = \left[(\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right]' \left[(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})S_{pooled}\right]^{-1} \left[(\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right]$$

değeri elde edilmeli.

$$\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} -1.9 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad S_{pooled} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\left[(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})S_{pooled}\right]^{-1} = \left[(\frac{1}{50} + \frac{1}{50})\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$
$$= 25\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{25}{9}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 13.889 & -2.778 \\ -2.788 & 5.556 \end{bmatrix}$$

olmak üzere test istatistiğinin değeri

$$T^2 = \begin{bmatrix} -1.9 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.889 & -2.788 \\ -2.778 & 5.556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.9 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$
$$= 52.47$$

olarak bulunur ve kritik değer

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{(n_1+n_2-2)p}{(n_1+n_2-p-1)} F_{p,n_1+n_2-p-1}(\alpha) \\ &= \frac{(50+50-2)2}{(50+50-2-1)} F_{2,50+50-2-1}(0.05) \\ &= \frac{98x2}{97} F_{2,97}(0.05) \\ &= (2.0206)(3.1) \\ &= 6.26 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T^2 = 52.47 > c^2 = 6.26$$

olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. İki farklı yöntemle imal edilen sabunların köpük ve yumuşaklık değerleri arasında fark vardır.

b) S_{pooled} matrisinin özdeğerleri ve birim özvektörleri sırasıyla

$$\hat{\lambda}_1 = 5.303\,,\ \hat{\lambda}_2 = 1.697\,,\ \underset{\sim}{\hat{e}_1} = \begin{bmatrix} 0.290 \\ 0.957 \end{bmatrix} \text{ ve } \underset{\sim}{\hat{e}_2} = \begin{bmatrix} 0.957 \\ -0.290 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan güven elipsinin eksen uzunluklarını yarısı,

$$\sqrt{\hat{\lambda}_i}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})c^2} \quad , \quad i = 1,2$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} (\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})c^2 &= (\frac{1}{50}+\frac{1}{50})(6.26) \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

olmak üzere; elipsin büyük ve küçük eksenlerin uzunluklarını yarısı sırasıyla

$$\sqrt{\hat{\lambda}_1}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)c^2} = \sqrt{5.303}\sqrt{0.25}$$

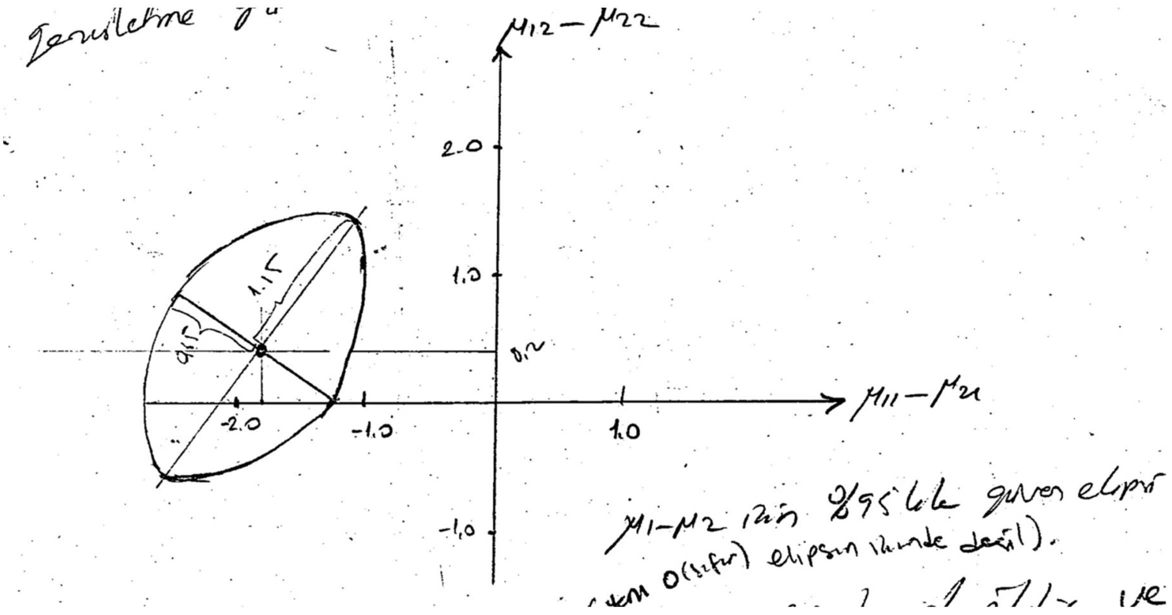
$$= 1.15$$

ve

$$\sqrt{\hat{\lambda}_2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)c^2} = \sqrt{1.697}\sqrt{0.25}$$

$$= 0.65$$

olarak bulunur. Buradan güven elipsi



biçiminde elde edilmiş olur. $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0}$ değeri elipsin içinde olmadığından hipotez reddedilir. Ancak elips incelendiğinde ikinci bileşen olan yumuşaklık için iki farklı yöntemle imal edilen sabunlar arasında fark olmadığı(“0” ı içeriyor), ancak birinci bileşen olan köpük için iki farklı yöntemle imal edilen sabunlar arasında fark olduğu (“0” ı içermiyor), sonucu elde edilmiştir. Yani ikinci yöntemle elde edilen sabunların daha çok köpürdüğü söylenebilir.

Eşanlı Güven Aralıkları

$H_0 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0}$ hipotezinin, $H_1 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 \neq \underline{0}$ hipotezine karşı reddedildiğinde, redde sebep olan bileşeni bulmak için, $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2$ fark vektörünün bileşenleri için elde edilen eşanlı güven aralıklarına göre karar verilebilir. Bu eşanlı güven aralıkları, ortalama vektörlerin farklarının tüm olası lineer bileşimleri göz önüne alınarak elde edilir. Örneklemlerin alındığı kitlelerin ortak varyans-kovaryans matrisine sahip çok değişkenli normal olduğu kabul edilsin.

Sonuç: $(1-\alpha)$ olasılığı ve $c^2 = \dfrac{(n_1+n_2-2)p}{(n_1+n_2-p-1)} F_{p,n_1+n_2-p-1}(\alpha)$ bütün $\underline{l}$ vektörleri için

$$\underline{l}'(\underline{\bar{X}}_1 - \underline{\bar{X}}_2) \pm c\sqrt{\underline{l}'\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_{pooled}\ \underline{l}}$$

ifadesi, $\underline{l}'(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$'yi içerecektir. Özel olarak $\mu_{1i} - \mu_{2i}$,

$$(\bar{X}_{1i} - \bar{X}_{2i}) \pm c\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S_{ii,pooled}} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,p$$

aralığının içinde yer alır.

Örnek: Belli bir bölgede evler klimalı olup olmadıklarına göre iki gruba ayrılmıştır. Bu iki grubun varyans-kovaryans matrisleri aynı olan çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu bilinmektedir. Klimalı evlerden rasgele seçilen 45 ve klimasız evlerden rasgel seçilen 55 evin Temmuz ayında tükettikleri elektrik miktarlarına ilişkin yoğun saatlerde tüketilen toplam elektrik miktarı (X_1) ile yoğun olmayan saatlerde tüketilen toplam elektrik (X_2) miktar olmak üzere iki farklı zaman diliminde alınan gözlem değerlerine ilişkin temel istatistikler aşağıda verilmiştir:

$$\bar{\mathrm{x}}_1 = \begin{bmatrix} 204.4 \\ 556.6 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} 130.0 \\ 355.0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 13825.3 & 23823.4 \\ 23823.4 & 73107.4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 8632.0 & 19616.7 \\ 19616.7 & 55964.5 \end{bmatrix}$$

Ortalama bileşenleri farkları için %95'lik eşanlı güven aralıklarını elde ederek, yorumlayınız.

Çözüm: Burada öncelikle varyans-kovaryans matrislerinin eşit olup olmadığının araştırılması gerekir. Ancak uygulama amaçlı eşit olduğunu kabul edilirse, birleştirilmiş örneklem varyans-kovaryans matrisi

$$S_{pooled} = \frac{(n_1-1)S_1+(n_2-1)S_2}{n_1+n_2-2}$$
$$= \begin{bmatrix} 10963.7 & 21505.5 \\ 21505.5 & 63661.3 \end{bmatrix}$$

ve kritik değer

$$c^2 = \frac{(n_1+n_2-2)p}{(n_1+n_2-p-1)} F_{p,n_1+n_2-p-1}(\alpha)$$
$$= \frac{(45+55-2)2}{(45+55-2-1)} F_{2,45+55-2-1}(0.05)$$
$$= \frac{(98)2}{97} F_{2,97}(0.05)$$
$$= (2.02)(3.1)$$
$$= 6.26$$

dir.

Burada amaç

$$H_0 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0}$$
$$H_1 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 \neq \underline{0}$$

hipotezlerinin testini eşanlı güven aralıklarından yapmaktır. Bunun için

$$\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{21} \\ \mu_{12} - \mu_{22} \end{bmatrix}$$

bileşenleri için eşanlı güven aralıklarına bakmak gerekir.

$$\mu_{11} - \mu_{21} \text{ için} : (\overline{x}_{11} - \overline{x}_{21}) \pm c\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) s_{11,pooled}}$$
$$: (204.4 - 130.0) \pm \sqrt{6.26}\sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{55}\right)(10963.7)}$$
$$: \ (21.7\ ;\ 127.1)$$

ve

$$\mu_{12}-\mu_{22} \text{ için} : (\bar{x}_{12}-\bar{x}_{22}) \pm c\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)s_{22,pooled}}$$

$$: (556.6-355.0) \pm \sqrt{6.26}\sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{55}\right)(63661.3)}$$

$$: \ (74.7 \ ; 328.5)$$

olarak elde edilir. Her iki aralık da hipotezde iddia edilen “0” değerini içermediğinden hipotez reddedilir. Yani klimalı ve klimasız evlerin tükettiği elektrik miktarı arasında fark vardır ve bu farklılık hem yoğun saatlerde hem de yoğun olmayan saatlerde tüketilen elektrik miktarının her ikisi için de söz konusudur.

Güven elipsine göre de aynı sonuca elde edilir. Bunun için birleştirilmiş örneklem varyans-kovaryans S_{pooled} matrisinin özdeğerleri ve ilişkili birim öz vektörleri sırasıyla

$$\hat{\lambda}_1 = 71323.5 \, , \ \hat{\lambda}_2 = 3301.5 \, , \ \underset{\sim}{\hat{e}_1} = \begin{bmatrix} 0.336 \\ 0.942 \end{bmatrix} \ \text{ ve } \ \underset{\sim}{\hat{e}_2} = \begin{bmatrix} 0.942 \\ -0.336 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan güven elipsinin eksen uzunluklarını yarısı, sırasıyla

$$\sqrt{\hat{\lambda}_1}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})c^2} = \sqrt{71323.5}\sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{45}\right)(6.26)}$$

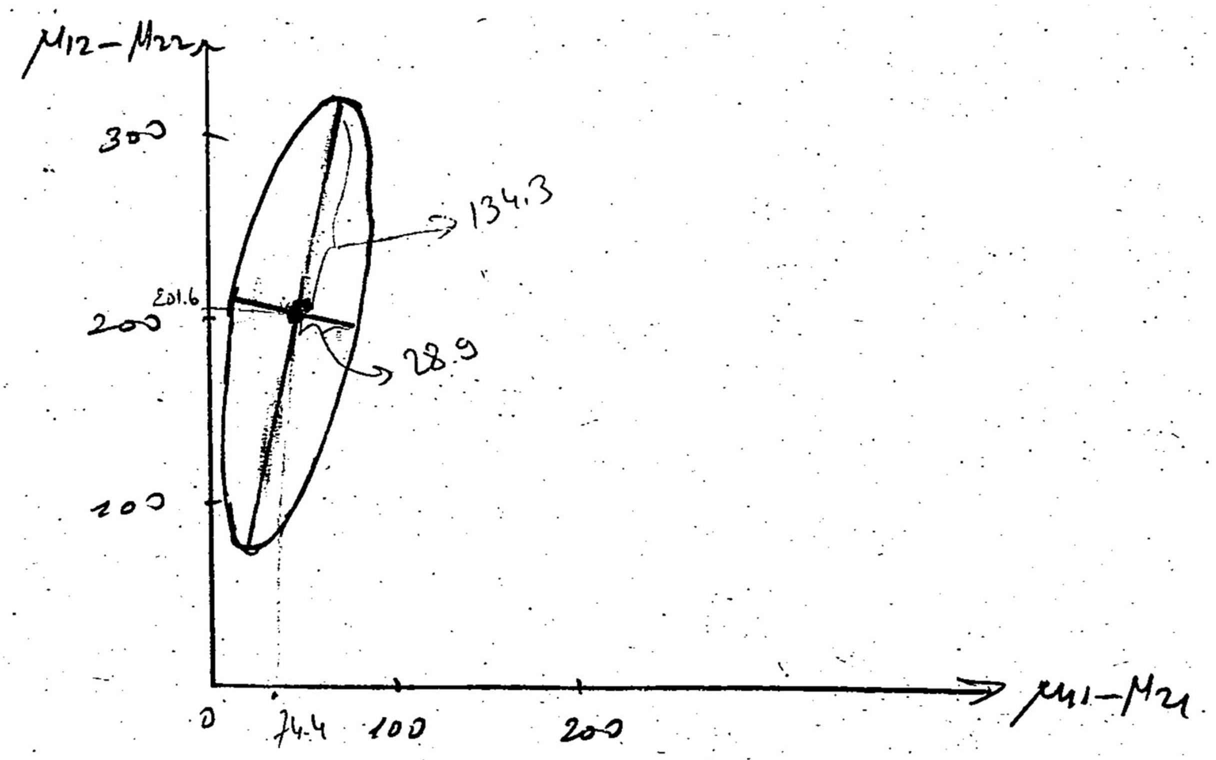
$$= 134.3$$

ve

$$\sqrt{\hat{\lambda}_2}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})c^2} = \sqrt{33015.5}\sqrt{\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{45}\right)(6.26)}$$

$$= 28.9$$

olarak bulunur. Buradan $\underset{\sim}{\mu_1}-\underset{\sim}{\mu_2}$ farkı için güven elipsi



olarak elde edilir. “0” değeri elipsin içinde yer almadığından hipotez reddedilir. Farklılığın hem yoğun hem de yoğun olmayan saatlerden kaynaklandığı şekilde görünmektedir.

Varyans-Kovaryan Matrislerinin Farklı olması ($\Sigma_1 \neq \Sigma_2$) Durumda Bağımsız İki Kitle Ortalamasının Karşılaştırılması

$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ olduğunda iki kitle ortalaması farkı için T^2'ye benzer bir test istatistiği kullanılabilir, öyle ki bu istatistiğin dağılımı bilinmeyen Σ_1 ve Σ_2'ye bağlı olmasın. Kitle varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği Bartlet testi ile yapılabilir.

Varyans-Kovaryan Matrislerinin Eşitlik Testi

Bu kısımda sadece Bartlet testinin uygulaması verilecek. g tane kitlenin olduğunu kabul edelim.

$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = ... = \Sigma_g$

H_1 : En az bir varyans-kovaryans matrisi diğerlerinden farklıdır

Buradan H_0 hipotezinin doğruluğu altında, birleştirilmiş örneklem varyans –kovaryans matrisi

$$S_{pooled} = S = \frac{\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)S_k}{\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)}$$

ile verilir. İlgili test istatistiği (BoxM)

$$M = \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\ln(|S|) - \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\ln(|S_k|)$$

ve

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)}\left[\sum_{k=1}^{g}\frac{1}{(n_k - 1)} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)}\right]$$

olmak üzere test istatistiği MC^{-1} yaklaşık olarak $\frac{1}{2}(g-1)p(p+1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılır. Yani $MC^{-1} \approx \chi^2_{\frac{1}{2}(g-1)p(p+1)}$ dir. Buradan

$$MC^{-1} > \chi^2_{\frac{1}{2}(g-1)p(p+1)}(\alpha)$$

ise H_0 hipotezi reddedilir.

Eğer $n_1 = n_2 = ... = n_g$ ise

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(g+1)}{6(p+1)(g(n-1))}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek: $g = 2$ ve $p = 3$ olan iki bağımsız kitleden alınan $n_1 = 26$, $n_2 = 24$ birimlik rasgele örneklemler ilişkin örneklem varyans-kovaryans matrisleri ,

$$S_1 = \begin{bmatrix} 633.214 & 169.015 & -10.062 \\ 169.015 & 576.862 & -64.726 \\ -10.062 & -64.726 & 58.345 \end{bmatrix} \text{ ve } S_2 = \begin{bmatrix} 329.201 & 152.679 & 18.826 \\ 152.679 & 387.172 & -17.464 \\ 18.826 & -17.464 & 30.493 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, örneklemlerin alındığı kitlelerin varyans-kovaryans matrislerinin eşit olup olmadığını 0.05 anlam düzeyinde araştırınız.

Çözüm:

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2$$
$$H_1 : \Sigma_1 \neq \Sigma_2$$

$$S_{pooled} = S = \frac{(26-1)S_1 + (24-1)S_2}{(26-1)+(24-1)}$$
$$= \begin{bmatrix} 487.541 & 161.187 & 3.780 \\ 161.187 & 485.969 & -42.079 \\ 3.780 & -42.079 & 45.000 \end{bmatrix}$$

$|S_1| = 17154329.19$, $|S_2| = 2837721.17$ ve $|S| = 8571204.575$

$$M = \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\ln(|S|) - \sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)\ln(|S_k|)$$
$$= (25+23)\ln(8571204.575) - [25\ln(17154329.19) + 23\ln(2837721.17)]$$
$$= 8.078$$

ve

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)}\left[\sum_{k=1}^{g}\frac{1}{(n_k - 1)} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)}\right]$$
$$= 1 - \frac{2(3)^2 + 3*3 - 1}{6(3+1)(2-1)}\left(\frac{1}{(26-1)} + \frac{1}{(24-1)} - \frac{1}{(26-1)+(24-1)}\right)$$
$$= 0.932135$$

olmak üzere

$$MC^{-1} = (8.078)(0.932135)$$
$$= 7.53$$

olarak elde edilir ve kritik değer

$$\chi^2_{\frac{1}{2}(g-1)p(p+1)}(\alpha) = \chi^2_{\frac{1}{2}(2-1)3(3+1)}(0.05)$$
$$= \chi^2_6(0.05)$$
$$= 12.592$$

için

$$MC^{-1} = 7.53 < 12.592$$

olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez.

Not: g ve p değerleri 5'den küçük ve n_i'ler 20'den büyük ise ki-kare yaklaşımı iyi sonuç vermektedir. Aksi halde F dağılımı yaklaşımı kullanılmalıdır.

Sonuç : n_1, n_2, $n_1 - p$ ve $n_2 - p$ yeterince büyük olduğunda, $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$(veya $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{0}$) eşitliği için yaklaşık $(1-\alpha)$'lık güven elipsoidi, bütün $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2$ farkları için

$$\left[(\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right]' \left[\frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2\right]^{-1} \left[(\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2) - (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)\right] \le \chi_p^2(\alpha)$$

sonucunu sağlar. Ayrıca $\underline{l}'(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)$ bileşimlerinin hepsi için $(1-\alpha)$'lık eşanlı güven aralıkları

$$\underline{l}'(\overline{\underline{X}}_1 - \overline{\underline{X}}_2) \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\underline{l}' \left(\frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2 \right) \underline{l}}$$

ile sağlanır.

Örnek: Klimalı ve klimasız evlerin tükettiği elektrik miktarları örneği için büyük örneklem yaklaşımını;

a) Eşanlı güven aralığı

b) Hipotez testi ile

irdeleyelim.

Çözüm:

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2 &= \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 13825.3 & 23825.4 \\ 23823.4 & 73107.4 \end{bmatrix} + \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 8632.0 & 19616.7 \\ 19616.7 & 55964.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 464.17 & 886.08 \\ 886.08 & 2642.15 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

lineer bileşimler

$$\underline{l}'(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{11}-\mu_{21}\\ \mu_{12}-\mu_{22}\end{bmatrix},$$
$$=\mu_{11}-\mu_{21}$$

$$\underline{l}'(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{11}-\mu_{21}\\ \mu_{12}-\mu_{22}\end{bmatrix}$$
$$=\mu_{12}-\mu_{22}$$

ve kritik değer

$$\chi_p^2(\alpha)=\chi_2^2(0.05)$$
$$=5.99$$

olmak üzere %95'lik eşanlı güven aralıkları:

$$\underline{l}'(\overline{\mathrm{x}}_1-\overline{\mathrm{x}}_2)\pm\sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\underline{l}'\left(\frac{1}{n_1}S_1+\frac{1}{n_2}S_2\right)\underline{l}}$$

ifadesinden,

$$\mu_{11}-\mu_{21}:(204.4-130.0)\pm\sqrt{5.99}\sqrt{464.17}$$
$$:(21.7;127.1)$$

ve

$$\mu_{12}-\mu_{22}:(556.6-355.0)\pm\sqrt{5.99}\sqrt{2642.15}$$
$$:(75.8;327.4)$$

olarak elde edilir. Her iki aralıkta hipotezde iddia edilen "0" değerini içermediğinden, Klimalı ve klimasız evlerin hem yoğun saatlerde, hem de yoğun olmayan saatlerde tükettikleri elektrik miktarları arasında fark vardır.

b) Büyük örnekleme yaklaşımı için

$$H_0:\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2=\underline{0}$$
$$H_1:\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2\neq\underline{0}$$

hipotezinin testi için test istatistiği

$$T^2=\left[(\underline{\overline{X}}_1-\underline{\overline{X}}_2)-(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)\right]'\left[(\frac{1}{n_1}S_1+\frac{1}{n_2}\mathrm{S}_2)\right]^{-1}\left[(\underline{\overline{X}}_1-\underline{\overline{X}}_2)-(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)\right]\approx\chi_p^2(\alpha)$$

dir ve $T^2 > \chi_p^2(\alpha)$ ise H_0 hipotezi reddedilir.

$$
\begin{aligned}
T^2 &= (\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2)' \left[(\frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} \mathrm{S}_2) \right]^{-1} (\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{\mathrm{x}}_2) \\
&= \begin{bmatrix} 204.4 & 130.0 \\ 556.6 & 355.0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 464.17 & 886.08 \\ 886.08 & 2642.15 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 204.4 & 130.0 \\ 556.6 & 355.0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 74.4 & 201.6 \end{bmatrix} (10^{-4}) \begin{bmatrix} 59.874 & -20.080 \\ -20.080 & 10.519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74.4 \\ 201.6 \end{bmatrix} \\
&= 15.66
\end{aligned}
$$

$T^2 = 15.66 > \chi_2^2(0.05) = 5.99$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Klimalı ve klimasız evlerin tükettikleri elektrik miktarları arasında fark vardır.