7. HAFTA

En Çok Olabilirlik Faktör Tahmin Yöntemi

Ortak faktörler $\underline{F}$ ve özel faktörler $\underline{\varepsilon}$' nun normal dağıldığı kabul edilirse, faktör ağırlıklarının ve özel varyansların en çok olabilirlik tahminleri elde edilebilir. $\underline{F}_j$ ve $\underline{\varepsilon}_j$' nin ortak dağılımı normal ise, $\underline{X}_j - \underline{\mu} = \mathbf{L}\underline{F}_j + \underline{\varepsilon}_j$, $j = 1,2,...,n$ gözlemi de normal dağılır. Olabilirlik fonksiyonu

$$L(\underline{\mu}, \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\mathbf{\Sigma}|^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})' + n(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})'\right]}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)p/2} |\mathbf{\Sigma}|^{(n-1)/2}} e^{-\frac{1}{2} tr\left[\mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})'\right]} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{n}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})}$$

biçimindedir. $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \mathbf{\Psi}$ olduğundan, bu fonksiyon $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{\Psi}$' ye bağlıdır.

Sonuç: $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$, $N_p(\underline{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ dağılımından rasgele bir örneklem olsun. Burada $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \mathbf{\Psi}$ m tane ortak faktör modeli için varyans kovaryans matrisidir. $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\mathbf{\Psi}}$ ve $\underline{\hat{\mu}} = \overline{\underline{X}}$ en çok olabilirlik tahmin edicileri $\mathbf{L}'\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{L}$ nın diagonal olma şartı altında yukarıda verilen olabilirlik fonksiyonunu maksimum yaparlar. Değişkenlerin ortak faktör varyanslarının en çok olabilirlik tahminleri

$$\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + ... + \hat{l}_{im}^2 \quad , \quad i = 1,2,...,p$$

dir. Buradan, j inci faktöre göre toplam örneklem varyansının oranı

$$\frac{\hat{l}_{1j}^2 + \hat{l}_{2j}^2 + ... + \hat{l}_{pj}^2}{s_{11} + s_{22} + ... + s_{pp}}$$

dir.

Ispat: En çok olabilirlik tahmin edicilerinin değişmezlik özelliğinden, $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{\Psi}$' nin fonksiyonları, $\hat{\mathbf{L}}$ ve $\hat{\mathbf{\Psi}}$' nin aynı fonksiyonları ile tahmin edilir. Özellikle, değişkenlerin ortak faktör varyansları, $h_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + ... + l_{im}^2$, $\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + ... + \hat{l}_{im}^2$, $i = 1,2,...,p$ en çok olabilirlik tahminlerine sahiptir.

Eğer değişkenler $\underline{Z} = \mathbf{V}^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})$ biçiminde standartlaştırılırsa, $\underline{Z}$ ' nin varyans kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}
Cov(\underline{Z}) &= Cov(\mathbf{V}^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})) \\
&= Cov(\mathbf{V}^{-1/2}\underline{X}) \\
&= \mathbf{V}^{-1/2} Cov(\underline{X}) \mathbf{V}^{-1/2} \\
&= \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^{-1/2} \\
&= \mathbf{V}^{-1/2} (\mathbf{L}\mathbf{L}' + \mathbf{\Psi}) \mathbf{V}^{-1/2} \\
&= \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{L}\mathbf{L}' \mathbf{V}^{-1/2} + \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{\Psi} \mathbf{V}^{-1/2} \\
&= (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})(\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})' + \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{\Psi} \mathbf{V}^{-1/2} \\
&= \mathbf{L}_Z \mathbf{L}_Z' + \mathbf{\Psi}_Z
\end{aligned}$$

dir, burada $\underline{Z}$ rasgele vektörünün elemanlarına ilişkin ağırlık matrisi $\mathbf{L}_Z = (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})$ ve özel varyanslardan oluşan matris $\mathbf{\Psi}_Z = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}$ olmak üzere

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca $E(\underline{Z}) = \underline{O}$, $Cov(\underline{Z}) = \boldsymbol{\rho} = Corr(\underline{X})$ dir.

En çok olabilirlik tahmin edicilerinin değişmezlik özelliğinden $\boldsymbol{\rho}$ 'nun en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}} &= (\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{L}})(\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{L}})' + \hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{V}}^{-1/2} \\
&= \hat{\mathbf{L}}_Z \hat{\mathbf{L}}_Z' + \hat{\mathbf{\Psi}}_Z
\end{aligned}$$

dir, burada $\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}$ ve $\hat{\mathbf{L}}$, $\mathbf{V}^{-1/2}$ ve $\mathbf{L}$ ' nin en çok olabilirlik tahmin edicileridir. Ayrıca

$$\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + \ldots + \hat{l}_{im}^2 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

standartlaştırılmış değişkenlerin ortak faktör varyanslarının en çok olabilirlik tahmin edicisidir ve *j* inci faktöre göre toplam (standartlaştırılmış) örneklem varyansının oranı

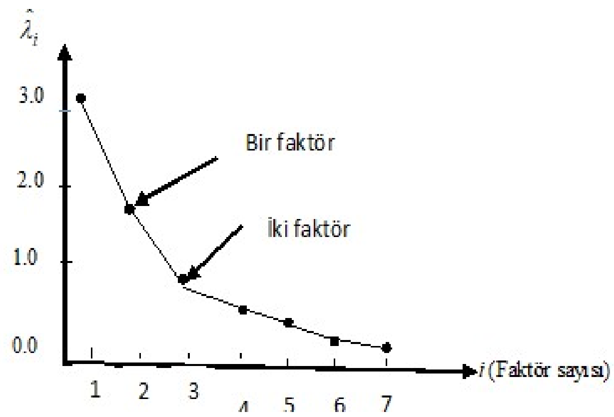
$$\frac{\hat{l}_{1j}^2+\hat{l}_{2j}^2+\ldots+\hat{l}_{pj}^2}{p}$$

dir, burada $\hat{l}_{ij}$ ler $\hat{\mathbf{L}}_Z$ elemanlarıdır.

Ortak Faktör Sayısının Belirlenmesi

Ortak faktör sayısının belirlenmesi için farklı yöntemler mevcuttur. Bunları bazıları temel bileşenler analizinde, temel bileşen sayısının belirlenmesi kriterleriyle aynıdır. Bu kriterler farklı sonuçlar verebilir.

1. Örneklem varyans kovaryans matrisi kullanılarak faktörleştirme yapıldığında $(\mathbf{S}-(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'+\hat{\mathbf{\Psi}}))_{pxp}$ fark matrisinin elemanları çok küçük veya standartlaştırılmış değişkenler kullanıldığında yani örneklem korelasyon matrisi kullanılarak faktörleştirme yapıldığında $(\mathbf{R}-(\hat{\mathbf{L}}_Z\hat{\mathbf{L}}_Z'+\hat{\mathbf{\Psi}}_Z))_{pxp}$ fark matrisi, elemanları sıfır olan matrise yakın bir matris ise belirlenen faktör sayısının uygun olduğuna karar verilir.
2. En basit karar verme süreçlerinden biri örneklem Varyans-Kovaryans matrisinden faktörleştirme yapılıyorsa $\frac{\sum_{j=1}^{m}\hat{\lambda}_j}{s_{11}+s_{22}+\ldots+s_{pp}}\geq\frac{2}{3}$ sonucunu veya örnekleme korelasyon matrisinden faktörleştirme yapılıyorsa $\frac{\sum_{j=1}^{m}\hat{\lambda}_j}{p}\geq\frac{2}{3}$ sonucunu sağlayan en küçük m değeri uygun faktör sayısıdır.
3. Korelasyon matrisinden faktörler elde ediliyorsa, 1'den büyük özdeğer saysı kadar faktör alınabilir.
4. Yamaç eğrisi grafiğinde (Scree plot) faktör sayısının özdeğerlere göre grafiği çizilir. Aşağıda verilen örnek yamaç eğrisi grafiğinde iki faktörün yeterli olduğu söylenebilir. Grafiğin düzleştiği noktadan önceki değer uygun faktör sayısı olarak alınabilir.



5. **5.** Örneklem korelasyon matrisinden faktörler belirlenirken, faktör yükleri matrisi $\hat{\mathbf{L}}_Z{}'$ den elde edilen değişkenlerin ortak faktör varyans değeri $\hat{h}_i^2$ değerleri, 1'e yakın ise faktörleştirmenin iyi olduğu söylenir. Eğer bazı $\hat{h}_i^2$ değerleri küçük ise (örneğin 0.50 den daha az) faktör sayısı artırılmalıdır.
6. **6.** Bartlet test yaklaşımına göre de uygun faktör sayısı belirlenebilirç Bu test için örneklem yeterince büyük olmalıdır. Bu durumda normal dağılım varsayımları göz önüne alınabilir. m tane ortak faktörün yeterliliği için hipotezler

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{pxp} = \mathbf{L}_{pxm}\mathbf{L}'_{mxp} + \boldsymbol{\Psi}_{pxp}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_{pxp} \neq \mathbf{L}_{pxm}\mathbf{L}'_{mxp} + \boldsymbol{\Psi}_{pxp}$$

biçiminde olmak üzere; Bartlett düzeltmeli elde edilen istatistik

$$((n-1) - \frac{2p+4m+5}{6})\ln(\frac{|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'+\hat{\boldsymbol{\Psi}}|}{|\mathbf{S}_n|}) > \chi^2_{((p-m)^2-p-m)/2}(\alpha)$$

ise H_0 hipotezi α anlam düzeyinde reddedilir. Burada $\mathbf{S}_n = \frac{n-1}{n}\mathbf{S}$ dir. n ve $n-p$ büyük olmalı. $\frac{(p-m)^2 - p - m}{2}$ serbestlik derecesi pozitif bir değer olması gerektiğinden,

$$m < \frac{2p+1-\sqrt{8p+1}}{2}$$ olmalıdır.

m tane ortak faktör modelinin yeterliliği için $\left|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\Psi}}\right|$, $\left|\mathbf{S}_n\right|$ ile karşılaştırılmaktadır. Eğer n büyük ve m, p ye göre küçük ise H_0 hipotezi genelde reddedilir. Ancak $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\Psi}}$, $\mathbf{S}_n$'e yeterince yakın olabilir. Bu durumda daha çok faktör eklenmesi, bu eklenen faktörlerin önemli olmasına rağmen yapıyı anlamak için ek bilgi sağlamaz. Eğer örneklem varyans kovaryans matrisi yerine, örneklem korelasyon matrisi alınırsa, bu durumda hipotezleri test etmek için kullanılan istatistikte $\ln(\frac{|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'+\hat{\mathbf{\Psi}}|}{|\mathbf{S}_n|})$ yerine, $\ln(\frac{|\hat{\mathbf{L}}_Z\hat{\mathbf{L}}_Z'+\hat{\mathbf{\Psi}}_Z|}{|\mathbf{R}|})$ alınır.

Örnek 11 : İkinci dünya savaşı sırasındaki olimpiyatlarında 139 atlet ile 160 müsabaka yapılmıştır. 10 dekatlon dalının her biri için değerler standartlaştırılmış ve n=160 müsabakaya ilişkin örneklem korelasyon matrisi aşağıda verilmiştir:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ 0.59 & 1 & & & & & & & & \\ 0.35 & 0.42 & 1 & & & & & & & \\ 0.34 & 0.51 & 0.38 & 1 & & & & & & \\ 0.63 & 0.49 & 0.19 & 0.29 & 1 & & & & & \\ 0.40 & 0.52 & 0.36 & 0.46 & 0.34 & 1 & & & & \\ 0.28 & 0.31 & 0.73 & 0.27 & 0.17 & 0.32 & 1 & & & \\ 0.20 & 0.36 & 0.24 & 0.39 & 0.23 & 0.33 & 0.24 & 1 & & \\ 0.11 & 0.21 & 0.44 & 0.17 & 0.13 & 0.18 & 0.34 & 0.24 & 1 & \\ -0.07 & 0.09 & -0.08 & 0.18 & 0.39 & 0.00 & -0.02 & 0.17 & 0.00 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada değişkenler

X_1 : 100 metre koşu

X_2 : Uzun atlama

X_3 : Gülle atma

X_4 : Yüksek atlama.

X_5 : 400 metre koşu

X_6 : 110 metre engelli koşu

X_7 : Disk atma

X_8 : Sırıkla atlama

X_9 : Cirit atma

X_{10} : 1500 metre koşu

biçiminde olup her bir dekatlon dalı için standart değerlerinin dağılımının normal veya yaklaşık normal olduğu kabul edilmiştir. m=4 alarak temel bileşenler ve en çok olabilirlik çözüm metotlarına göre faktör analizi yapınız. Elde ettiğiniz çözümleri karşılaştırınız.

Çözüm 11: R matrisine ilişkin özdeğer ve özvektörler sırasıyla

$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_6$	$\hat{\lambda}_7$	$\hat{\lambda}_8$	$\hat{\lambda}_9$	$\hat{\lambda}_{10}$
3.7866	1.5173	1.1144	0.9134	0.7201	0.5950	0.5267	0.3837	0.2353	0.2075

$$\hat{\underset{\sim}{e}}_1' = [0.3549\ 0.4052\ 0.3607\ 0.3462\ 0.3184\ 0.3530\ 0.3192\ 0.2767\ 0.2231\ 0.0753]$$

$$\hat{\underset{\sim}{e}}_2' = [0.1767\ 0.1491\ -0.4340\ 0.1088\ 0.4474\ 0.0341\ -0.4231\ 0.0706\ -0.3564\ 0.4839]$$

$$\hat{\underset{\sim}{e}}_3' = [-0.4928\ -0.1824\ 0.0445\ 0.1334\ -0.0793\ -0.1525\ 0.1037\ 0.3892\ 0.3523\ 0.6234]$$

$$\hat{\underset{\sim}{e}}_4' = [0.2156\ 0.0968\ -0.1835\ 0.4142\ -0.4381\ 0.3606\ -0.2452\ 0.4549\ -0.2454\ 0.2916]$$

Temel bileşenler ve en çok olabilirlik çözüm metotlarına ilişkin faktör analizi aşağıda verilmiştir:

	Temel Bileşen Yöntemi						En Çok Olabilirlik Yöntemi					
Değişkenler	F_1	F_2	F_3	F_4	$\tilde{h}_i^2$	$\tilde{\psi}_i$	F_1	F_2	F_3	F_4	$\hat{h}_i^2$	$\hat{\psi}_i$
X_1	**0.691**	0.217	**-0.520**	-0.206	0.84	0.16	-0.090	0.341	**0.830**	-0.169	0.84	0.16
X_2	**0.789**	0.184	-0.193	0.092	0.70	0.30	0.065	0.433	**0.595**	0.275	0.62	0.38
X_3	**0.702**	**-0.535**	0.047	-0.175	0.81	0.19	-0.139	**0.990**	0.000	0.000	1.00	0.00
X_4	**0.674**	0.134	0.139	0.396	0.65	0.35	0.156	0.406	0.336	**0.445**	0.50	0.50
X_5	**0.620**	<u>**0.551**</u>	-0.084	**-0.419**	0.87	0.13	0.376	0.245	**0.671**	-0.137	0.67	0.33
X_6	**0.687**	0.042	-0.161	0.345	0.62	0.38	-0.021	0.361	**0.425**	0.388	0.46	0.54
X_7	**0.621**	**-0.521**	0.109	-0.234	0.72	0.28	-0.063	**0.728**	0.030	0.019	0.54	0.46
X_8	**0.538**	0.087	<u>***0.411***</u>	**0.440**	0.66	0.34	0.155	0.264	0.229	**0.394**	0.30	0.70
X_9	**0.434**	-0.439	0.372	-0.235	0.57	0.43	-0.326	**0.441**	-0.010	0.098	0.20	0.80
X_{10}	0.147	<u>**0.596**</u>	**0.658**	-0.279	0.89	0.11	**0.998**	0.059	0.000	0.000	1.00	0.00
Toplam standartlaştırılmış örneklem varyansının birikimli oranı	<u>0.38</u>	<u>0.53</u>	<u>0.64</u>	<u>0.73</u>			<u>0.13</u>	<u>0.37</u>	<u>0.55</u>	<u>0.61</u>		

$$\frac{(0.691)^2+(0.789)^2+(0.702)^2+(0.674)^2+(0.620)^2+(0.687)^2+(0.621)^2+(0.538)^2+(0.434)^2+(0.147)^2}{10}=0.38$$

Diğer açıklama oranları da benzer şekilde hesaplanır.

İki farklı çözüm yöntemi çok farklı sonuçlar vermektedir.

Temel Bileşen Yönteminde:

Faktör 1'de 1500 koşusu (X_{10}) hariç diğer tüm dallar **büyük** pozitif yüklere sahiptir. Bu faktör genel atletik yeteneği olabilir. Yani atletlerin atletizme yakınlığı faktörü olabilir. Geriye kalan faktörler kolayca ifade edilememektedir.

Faktör 2'de atma yeteneği ile koşma yeteneği zıt görünümdedir.

Fakat 3'de 100 metre koşusu ile 1500 metre koşusu zıt görünümde olmasına rağmen bu faktör üzerinde sırıkla atlama değişkeninin ağırlığı da yüksektir.

Faktör 4'ü izah etmek zordur.

En Çok Olabilirlik Yönteminde:

Faktör 1'de sadece 1500 m koşusu en büyük ağırlığa sahiptir. Bu yüzden birinci faktöre mukavamet koşu faktörü ismi verilebilir.

Faktör 2 kuvvet faktörü görünümündedir. (gülle-disk-cirit atma ağırlıkları yüksek olduğundan)

Faktör 3 hızlı koşma faktörü olabilir. Çünkü bu faktörde 100 m ve 400 m koşularının ağırlıkları yüksektir.

Faktör 4 bacak kuvveti faktörü olarak değerlendirilebilir.

Dört faktörlü temel bileşen çözümü toplam örneklem varyansını daha çok açıklamasına rağmen, tahmini özel varyanslar bazı durumlarda büyüktür. (örneğin yüksek atlama ve engelli koşu) Bu da bazı dalların değerlerine göre özel niteliklerin olması gerektiğini gösterir. Dört faktörlü en çok olabilirlik yöntemi toplam örneklem varyansını daha az açıklamasına göre, en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen artık matrisi daha iyidir.

Artık matrisleri :

<u>Temel Bileşenler Yönteminde</u>

$$R-\tilde{L}\tilde{L}'-\tilde{\Psi}=\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ -0.075 & 0 & & & & & & & & \\ -0.030 & -0.010 & 0 & & & & & & & \\ -0.001 & -0.056 & 0.042 & 0 & & & & & & \\ -0.047 & -0.077 & -0.020 & -0.024 & 0 & & & & & \\ -0.096 & -0.092 & -0.030 & -0.122 & 0.022 & 0 & & & & \\ -0.027 & -0.041 & -0.031 & -0.001 & -0.017 & 0.014 & 0 & & & \\ 0.114 & -0.042 & -0.034 & -0.215 & 0.067 & -0.129 & -0.09 & 0 & & \\ 0.051 & 0.042 & -0.158 & -0.022 & 0.036 & 0.041 & -0.254 & -0.05 & 0 & \\ 0.016 & 0.017 & 0.056 & 0.020 & -0.091 & 0.076 & 0.062 & -0.019 & -0.112 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>En Çok Olabilirlik Yönteminde:</u>

$$R-\hat{L}\hat{L}'-\hat{\Psi}=\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0.000 & 0 & & & & & & & & \\ 0.000 & 0.000 & 0 & & & & & & & \\ 0.012 & 0.002 & 0.000 & 0 & & & & & & \\ 0.000 & -0.002 & 0.000 & -0.033 & 0 & & & & & \\ -0.012 & 0.006 & 0.000 & 0.001 & 0.028 & 0 & & & & \\ 0.004 & -0.025 & 0.000 & -0.034 & -0.002 & 0.036 & 0 & & & \\ 0.000 & -0.009 & 0.000 & 0.006 & 0.008 & -0.012 & 0.043 & 0 & & \\ -0.018 & 0.000 & 0.000 & -0.045 & 0.052 & -0.013 & 0.016 & 0.091 & 0 & \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0 \end{bmatrix}$$

En çok olabilirlik yöntemine göre elde edilen artık matrisinin elemanları sıfıra daha yakın olduğundan, bu kritere göre en çok olabilirlik yöntemi çözümü tercih edilir.

Örnek 12 : Beş hisse senedinin 100 haftalık kar oranına ilişkin hisse senedi fiyat verileri daha önce verilmişti. m=2 alarak temel bileşenler ve en çok olabilirlik çözüm metotlarına göre faktör analizi yapınız. Elde ettiğiniz çözümleri karşılaştırınız. m=2 ortak faktör sayısı yeterli midir?

Çözüm 12:

Temel bileşenler ve en çok olabilirlik çözüm metotlarına ilişkin faktör analizi aşağıda verilmiştir

	Temel Bileşen Yöntemi				En Çok Olabilirlik Yöntemi			
Değişkenler	F_1	F_2	$\tilde{h}_i^2$	$\tilde{\psi}_i$	F_1	F_2	$\hat{h}_i^2$	$\hat{\psi}_i$
X_1	0.784	-0.216	0.66	0.34	0.684	0.189	0.50	0.50
X_2	0.772	-0.458	0.81	0.19	0.694	0.517	0.75	0.25
X_3	0.794	-0.234	0.69	0.31	0.681	0.248	0.53	0.47
X_4	0.713	0.473	0.73	0.27	0.621	-0.073	0.30	0.61
X_5	0.712	0.523	0.78	0.22	0.792	-0.442	0.82	0.18
Toplam standartlaştırılmış örneklem varyansının birikimli oranı	0.571	0.733			0.485	0.598		

Artık matrisi (En Çok Olabilirlik Yöntemi için)

$$R - \hat{L}\hat{L}' - \hat{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0.05 & 0 & & & \\ -0.004 & -0.003 & 0 & & \\ -0.024 & -0.004 & 0.031 & 0 & \\ -0.004 & 0.000 & -0.004 & 0.000 & 0 \end{bmatrix}$$

En çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen artık matrisi daha iyidir. Bu sebepten En çok olabilirlik yöntemi tercih edilir.

Faktörler ile açıklanan toplam örneklem varyansının birikimli oranı temel bileşen faktörü için, en çok olabilirlik faktöründen daha büyüktür. Bu sonuç sürpriz değildir. Çünkü bu kriter temel bileşen faktörünü tercih eder. Temel bileşen faktör analizi ile elde edilen ağırlıklar temel bileşenlerle ilgilidir öyleki bunlar varyans optimizasyon özelliklerine sahiptir.

En çok olabilirlik çözümüne bakılırsa bütün değişkenler F_1 üzerinde büyük pozitif ağırlıklara sahiptir. Bu faktörlere temel bileşenler çözümünde olduğu gibi piyasa (Pazar) faktörü adı verilir. Ancak ikinci faktörün yorumu temel bileşenlerdeki gibi açık değildir. Faktör ağırlıklarının işareti zıtlık ile tutarlıdır veya endüstri faktörü ile ancak büyüklükler bazı durumlarda küçüktür ve bu faktör X_2 ve X_5 arasındaki karşılaştırma biçiminde tanımlanır. En çok olabilirlik çözümleri için ilk faktörün ağırlıklarının yapısı, $\hat{L}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{L}$'nın diagonal olması teklik koşulu ile zorlanmaktadır. Böylece uygun faktör yapıları faktörler döndürülene kadar ortaya çıkarılamaz.

$$\hat{L}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.684 & 0.694 & 0.681 & 0.621 & 0.792 \\ 0.189 & 0.517 & 0.248 & -0.073 & -0.442 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.684 & 0.189 \\ 0.694 & 0.517 \\ 0.681 & 0.248 \\ 0.621 & -0.073 \\ 0.792 & -0.442 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7.97 & 0.033 \\ 0.033 & 2.37 \end{bmatrix}$$

Ortak faktör sayısının belirlenmesi:

$$\begin{matrix} H_0 : \Sigma = LL' + \Psi \\ H_1 : \Sigma \neq LL' + \Psi \end{matrix} \quad , \alpha = 0.05$$ anlam düzeyinde test edilmelidir.

Test istatistiği :

$$\left[n - 1 - \frac{\left(2p + 4m + 5\right)}{6} \right] \ln \frac{\left|\hat{\Sigma}\right|}{\left|S_n\right|} \sim \chi^2_{[(p-m)^2 - p - m]/2}$$ biçiminde verilmişti.

Burada $S_n = \dfrac{n-1}{n} S$ dir.

$$\frac{\left|\hat{\Sigma}\right|}{\left|S_n\right|} = \frac{\left|\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}\right|}{\left|R\right|}$$ olduğunu gösterelim:

$\hat{V}^{-1/2}$ diagonal matris olsun öyle ki $\hat{V}^{-1/2} S_n \hat{V}^{-1/2} = R$ dir.

Determinant özelliklerinden,

$$\left|\hat{V}^{-1/2}\right|\left|\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}\right|\left|\hat{V}^{-1/2}\right| = \left|\hat{V}^{-1/2}\hat{L}\hat{L}'\hat{V}^{-1/2} + \hat{V}^{-1/2}\hat{\Psi}\hat{V}^{-1/2}\right|$$

$$\frac{\left|\hat{\Sigma}\right|}{\left|S_n\right|} = \frac{\left|\hat{V}^{-1/2}\right|}{\left|\hat{V}^{-1/2}\right|}\frac{\left|\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}\right|}{\left|S_n\right|}\frac{\left|\hat{V}^{-1/2}\right|}{\left|\hat{V}^{-1/2}\right|} = \frac{\left|\hat{V}^{-1/2}\hat{L}\hat{L}'\hat{V}^{-1/2} + \hat{V}^{-1/2}\hat{\Psi}\hat{V}^{-1/2}\right|}{\left|\hat{V}^{-1/2} S_n \hat{V}^{-1/2}\right|} = \frac{\left|\hat{L}_Z\hat{L}_Z' + \hat{\Psi}_Z\right|}{\left|R\right|}$$

Burada $\hat{L}_Z = \hat{V}^{-1/2}\hat{L}$ ve $\hat{\Psi}_Z = \hat{V}^{-1/2}\hat{\Psi}\hat{V}^{-1/2}$ sırasıyla $\underset{\sim}{Z}$ standartlaştırılmış değişkenlerinin ağırlık matrisi ve özel varyans matrisidir.

n=100 (örneklem hacmi), p=5 (değişken sayısı), m=2 (faktör sayısı) olmak üzere

$$\frac{\left|\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}\right|}{\left|R\right|} = \frac{0.194414}{0.193163} = 1.0065$$

$$\left[n - 1 - \frac{(2p + 4m + 5)}{6}\right]\ln\frac{\left|\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}\right|}{\left|R\right|} = \left[100 - 1 - \frac{(2*5 + 4*2 + 5)}{6}\right]\ln(1.0065) = 0.62$$

Serbestlik derecesi : $\frac{[(5-2)^2 - 5 - 2]}{2} = 1$

$\chi_1^2(0.05) = 3.841$

$0.62 < 3.841$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemez. Bu durumda 2 faktörlü çözüm yeterlidir. Faktör sayısı bir azaltılarak aynı işlemler tekrar yapılmalı. Burada amaç m=1 faktör de yeterli midir sorusuna cevap bulmaktır.