

12. HAFTA

Örnek 23 : Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan $p=2$ için, $n_1 = n_2 = 3$ birimlik rasgele örneklemeler ve betimsel istatistikler aşağıda verilmiştir. Eşit prior ve eşit hatalı sınıflandırma maliyetleri için hata oranı tahminlerini elde ediniz.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 12 & 10 & 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Çözüm 23 : Hata oranı tahmini $APER = \frac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2}$ formülü ile elde edilir. Burada

n_{12} : Π_1 deki birimlerden Π_2 ye hatalı sınıflandırılanların sayısı

n_{21} : Π_2 deki birimlerden Π_1 e hatalı sınıflandırılanların sayısı

biçiminde tanımlıdır. O halde hatalı sınıflandırılan birim sayılarını tespit etmeliyiz. Bunun için öncelikle sınıflandırma bölgelerini belirleyelim. Bu bölgeler $y = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} \underline{x}$ ifadesi yardımıyla

$$R_1(y): y \geq \frac{1}{2} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2)$$

$$R_2(y): y < \frac{1}{2} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2)$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu formüllerin örneklem değerlerini bulalım:

$$S_{pooled} = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{2S_1 + 2S_2}{3 + 3 - 2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_{pooled}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y &= \hat{l}'\underline{x} \\
&= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) S_{pooled}^{-1} \underline{x} \\
&= [-1 \quad 3] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3}
\end{aligned}$$

Buradan $\hat{l}' = \frac{1}{3}[-1 \quad 2]$ olduğu açıktır.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\hat{m} &= \frac{1}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) S_{pooled}^{-1} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\
&= \frac{1}{2}[-1 \quad 3] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} \\
&= 4.5
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan bölgeler

$$R_1 : y \geq 4.5$$

$$R_2 : y < 4.5$$

olarak elde edilir. Şimdi bu örneklerdeki birimlerden yanlış sınıflandırılanları bulalım:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \hat{l}'\underline{x}_0 \\
&= \frac{1}{3}[-1 \quad 2]\underline{x}_0
\end{aligned}$$

$$\checkmark \quad y_{011} = \frac{1}{3}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} = 7.83 > 4.5 \Rightarrow \Pi_1$$

$$\checkmark \quad y_{012} = \frac{1}{3}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = 5.33 > 4.5 \Rightarrow \Pi_1$$

$$\times \quad y_{013} = \frac{1}{3}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = 4.33 < 4.5 \Rightarrow \Pi_2 \quad \text{halbuki} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_1$$

$$\checkmark \quad y_{021} = \frac{1}{3}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 < 4.5 \Rightarrow \Pi_2$$

$$\times \quad y_{022} = \frac{1}{3}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = 5 > 4.5 \Rightarrow \Pi_1 \text{ halbuki } \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_2$$

$$\checkmark \quad y_{023} = \frac{1}{3}[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 < 4.5 \Rightarrow \Pi_2$$

| | | Sınıflandırılan Kitle | |
|-------------|---------|-----------------------|---------|
| | | Π_1 | Π_2 |
| Doğru Kitle | Π_1 | 2 | 1 |
| | Π_2 | 1 | 2 |

$$APER = \frac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2} = \frac{1+1}{3+3} = \frac{2}{6} = 0.33$$

elde edilir.

Şimdi Π_1 kitesinden birinci gözlem $x'_{11} = [2 \quad 12]$ atılsın. Bu durumda

$$X_{1H} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{1H} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$S_{H,pooled} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad S_{H,pooled}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \hat{l}'_{-H} \underline{x}_H = (\bar{x}_{1H} - \bar{x}_2) S_{H,pooled}^{-1} \underline{x}_H$$

$$\hat{m}_H = \frac{1}{2} (\bar{x}_{1H} - \bar{x}_2) S_{H,pooled}^{-1} (\bar{x}_{1H} + \bar{x}_2)$$

Kare uzaklığı \bar{x}_{1H} e göre

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1H} &= (\underline{x}_H - \bar{x}_{1H})' S_{H,pooled}^{-1} (\underline{x}_H - \bar{x}_{1H}) \\ &= [2-3.5 \quad 12-9] \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-3.5 \\ 12-9 \end{bmatrix} \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

Kare uzaklığı \bar{x}_2 e göre

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= (\underline{x}_H - \bar{x}_2)' S_{H,pooled}^{-1} (\underline{x}_H - \bar{x}_2) \\ &= [2-4 \quad 12-7] \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-4 \\ 12-7 \end{bmatrix} \\ &= 10.3\end{aligned}$$

\underline{x}_H den \bar{x}_{1H} ' e uzaklık, \bar{x}_{1H} den \bar{x}_2 ' e uzaklıktan daha küçük olduğundan \underline{x}_H , Π_1 'e sınıflandırılır. Bu durumda doğru sınıflandırma yapılmıştır. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}\underline{x}'_H &= [4 \quad 10] \Rightarrow \Pi_2 \\ \underline{x}'_H &= [3 \quad 8] \Rightarrow \Pi_2 \\ \underline{x}'_H &= [5 \quad 7] \Rightarrow \Pi_2 \\ \underline{x}'_H &= [3 \quad 9] \Rightarrow \Pi_1 \\ \underline{x}'_H &= [4 \quad 5] \Rightarrow \Pi_2\end{aligned}$$

sınıflandırma yapılır. Buradan $n_{12} = 2$ ve $n_{21} = 1$ elde edilir. Böylece beklenen gerçek hata

oranının tahmini $\hat{E}(AER) = \frac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2} = \frac{2+1}{3+3} = 0.5$ olarak elde edilir. Daha önce elde edilen

$APER = 0.33$ değeri, performansın iyimser ölçüsüdür. Örneklemin hacmi geniş olduğunda $APER$ ile $\hat{E}(AER)$ arasındaki fark çok büyük olmaz.

Örnek 24 : Bir hava yolu firmasını tercih eden yerli (Π_1 Kitle) ve yabancı (Π_2 Kitle) yolcuların iki özelliğine ilişkin kitle ortalama vektörleri ve ortak varyans-kovaryans matrisi

$$\underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere normal dağılmaktadır. Sınıflandırma kuralını elde ederek, $\underline{x}_0' = [4 \quad 2]$ ölçümüne sahip yolcunun yerli mi yabancı mı olup olmadığına karar veriniz. Optimal hata oranlarını hesaplayınız.

Çözüm 24 :

Prior olasılıklar verilmediğinden eşit kabul edilebilir.

Hatalı sınıflandırma maliyetleri verilmediğinden eşit kabul edilebilir.

Aynı varyans-kovaryans matrisine sahip iki normal kitle, eşit prior olasılık ve eşit hatalı sınıflandırma maliyetine sahip ise Minimum ECM kuralı Fisher sınıflandırma kuralına eşdeğerdir.

Π_1 : Yerli yolcu

Π_2 : Yabancı yolcu

Öncelikle sınıflandırma kuralını belirleyelim. Bu bölgeler $Y = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} \underline{X}$ ifadesi yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y &= \underline{l}' \underline{X} \\ &= (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} \underline{X} \\ &= [3 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= 3X_1 - 3X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \\ &= \frac{1}{2} [3 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [3 \quad -3] \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Sınıflandırma kuralı :

$$y_0 = 3x_{01} - 3x_{02} \geq \frac{15}{2} \text{ ise } \underline{x}'_0 = [x_{01} \quad x_{02}] \text{ } \Pi_1 \text{ e atanır.}$$

$$y_0 = 3x_{01} - 3x_{02} < \frac{15}{2} \text{ ise } \underline{x}'_0 = [x_{01} \quad x_{02}] \text{ } \Pi_2 \text{ ye atanır.}$$

$\underline{x}'_0 = [4 \ 2]$ için atama kuralından:

$y_0 = 3(4) - 3(2) = 6 < \frac{15}{2}$ olduğundan $\underline{x}'_0 = [4 \ 2]$ Π_2 ye atanır.

Ayrıca

$$\begin{aligned}\sigma^2_Y = \Delta^2 &= (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) \\ &= \underline{l}' \Sigma \underline{l} = [3 \ -3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 9\end{aligned}$$

$$OER = \min TPM = \Phi \left\{ \frac{-\Delta}{2} \right\} = \Phi \left\{ \frac{-3}{2} \right\} = 0.0668 \text{ dir. (Teori dersinde elde edilmişti)}$$

Örnek 25 : Π_1 ve Π_2 sırasıyla $N_2(\underline{\mu}_1, \Sigma_1)$ ve $N_2(\underline{\mu}_2, \Sigma_2)$ kitleleri olsun. Kitle parametreleri

$$\underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}, \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}, \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 32 \end{bmatrix} \text{ ve } \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 20 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiş olsun. $C(1|2) = 10$, $C(2|1) = 73$ ve $p_1 = p_2$ olduğu bilinmektedir.

Sınıflandırma bölgelerini bulunuz ve $\underline{x}_0' = [30 \ 35]$ gözlemini ait olduğu kitleye atayınız.

Çözüm 25 : $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ olduğundan sınıflandırma bölgeleri

$$R_1 : -\frac{1}{2} \underline{x}' (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1}) \underline{x} + (\underline{\mu}'_1 \Sigma_1^{-1} - \underline{\mu}'_2 \Sigma_2^{-1}) \underline{x} - k \geq \ln \left[\left(\frac{C(1|2)}{C(2|1)} \right) \frac{p_2}{p_1} \right]$$

$$R_2 : -\frac{1}{2} \underline{x}' (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1}) \underline{x} + (\underline{\mu}'_1 \Sigma_1^{-1} - \underline{\mu}'_2 \Sigma_2^{-1}) \underline{x} - k < \ln \left[\left(\frac{C(1|2)}{C(2|1)} \right) \frac{p_2}{p_1} \right]$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} \right) + \frac{1}{2} (\underline{\mu}'_1 \Sigma_1^{-1} \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}'_2 \Sigma_2^{-1} \underline{\mu}_2)$$

ile elde edilir. Burada

$$\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0740 & -0,0277 \\ -0,0277 & 0,0416 \end{bmatrix}, \Sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0980 & 0,1372 \\ 0,1372 & 0,3921 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma_1| = \begin{vmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 32 \end{vmatrix} = 432 \text{ ve } |\Sigma_2| = \begin{vmatrix} 20 & -7 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 51$$

$$\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0740 & -0,0277 \\ -0,0277 & 0,0416 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0980 & 0,1372 \\ 0,1372 & 0,3921 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0240 & -0,1649 \\ -0,1649 & -0,3505 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mu}'_1 \Sigma_1^{-1} = [10 \quad 15] \begin{bmatrix} 0,0740 & -0,0277 \\ -0,0277 & 0,0416 \end{bmatrix} = [0,3245 \quad 0,347]$$

$$\underline{\mu}'_2 \Sigma_2^{-1} = [10 \quad 25] \begin{bmatrix} 0,0980 & 0,1372 \\ 0,1372 & 0,3921 \end{bmatrix} = [4,41 \quad 11,1745]$$

$$(\underline{\mu}'_1 \Sigma_1^{-1} - \underline{\mu}'_2 \Sigma_2^{-1}) = [0,3245 \quad 0,347] - [4,41 \quad 11,1745] = [-4,0855 \quad -10,8275]$$

$$\underline{\mu}'_1 \Sigma_1^{-1} \underline{\mu}_1 = [10 \quad 15] \begin{bmatrix} 0,0740 & -0,0277 \\ -0,0277 & 0,0416 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = [0,3245 \quad 0,347] \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = 8,45$$

$$\underline{\mu}'_2 \Sigma_2^{-1} \underline{\mu}_2 = [10 \quad 25] \begin{bmatrix} 0,0980 & 0,1372 \\ 0,1372 & 0,3921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} = [4,41 \quad 11,1745] \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} = 323,4625$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{432}{51} \right) + \frac{1}{2} (8,45 - 323,4625) = -156,43795$$

$$\ln \left[\left(\frac{C(1|2)}{C(2|1)} \right) \frac{p_2}{p_1} \right] = \ln \left[\left(\frac{10}{73} \right) \frac{0,5}{0,5} \right] = \ln(0,136986) = -1,9879$$

olmak üzere sınıflandırma bölgeleri:

$$R_1 : -\frac{1}{2} \underline{x}' \begin{pmatrix} -0,0240 & -0,1650 \\ -0,1650 & -0,3505 \end{pmatrix} \underline{x} + (-4,0877 \quad -10,8292) \underline{x} - (-156,43795) \geq -1,9879$$

$$R_2 : -\frac{1}{2} \underline{x}' \begin{pmatrix} -0,0240 & -0,1650 \\ -0,1650 & -0,3505 \end{pmatrix} \underline{x} + (-4,0877 \quad -10,8292) \underline{x} - (-156,43795) < -1,9879$$

ya da

$$R_1 : -\frac{1}{2} \underline{x}' \begin{pmatrix} -0,0240 & -0,1650 \\ -0,1650 & -0,3505 \end{pmatrix} \underline{x} + (-4,0877 \quad -10,8292) \underline{x} \geq -158,426$$

$$R_2 : -\frac{1}{2} \underline{x}' \begin{pmatrix} -0,0240 & -0,1650 \\ -0,1650 & -0,3505 \end{pmatrix} \underline{x} + (-4,0877 \quad -10,8292) \underline{x} < -158,426$$

olarak elde edilir.

$\underline{x}_0' = [30 \ 35]$ değeri ifadelerde yerine yazıldığında

$$-\frac{1}{2}[30 \ 35] \begin{pmatrix} -0.0240 & -0.1649 \\ -0.1649 & -0.3505 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \end{bmatrix} + (-4.0855 \ -10.8275) \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \end{bmatrix} = -102.9015 > -158.426$$

olduğundan Π_1 kitlesine atanır.

Örnek 26: Π_1 : üzerine binilerek kesme yapan araca sahip olanların grubunu ve Π_2 : böyle araca sahip olmayanların grubunu gösterebilirsin. Bir satış kampanyasında en iyi satış profilini belirlemek için bu tür aleti üreten firmalar, x_1 : gelir ve x_2 : sahip olduğu arazi büyüklüğü verilerine bağlı bu tür araca sahip olan ve olmayan ailelerin sınıfıyla ilgilenmektedir. Her bir kitleden 12 birimlik rasgele örneklemeler alınmış ve elde edilen değerler aşağıdadır:

| | Π_1 grubu | | Π_2 grubu | |
|---------------|---------------|-------|---------------|-------|
| Gözlem sayısı | x_1 | x_2 | x_1 | x_2 |
| 1 | 20,0 | 9,2 | 25,0 | 9,8 |
| 2 | 28,5 | 8,4 | 17,6 | 10,4 |
| 3 | 21,6 | 10,8 | 21,6 | 8,6 |
| 4 | 20,5 | 10,4 | 14,4 | 10,2 |
| 5 | 29,0 | 11,8 | 28,0 | 8,8 |
| 6 | 36,7 | 9,6 | 16,4 | 8,8 |
| 7 | 36,0 | 8,8 | 19,8 | 8,0 |
| 8 | 27,6 | 11,2 | 22,0 | 9,2 |
| 9 | 23,0 | 10,0 | 15,8 | 8,2 |
| 10 | 31,0 | 10,4 | 11,0 | 9,4 |

$$\bar{\underline{x}}_1 = \begin{bmatrix} 27.39 \\ 10.06 \end{bmatrix}, \quad \bar{\underline{x}}_2 = \begin{bmatrix} 19.16 \\ 9.14 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 36,954 & -1,412 \\ -1,412 & 1,156 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 26,362 & -0,673 \\ -0,673 & 0,658 \end{bmatrix}$$

$$S_{pooled} = \begin{bmatrix} 31.6585 & -1.0432 \\ -1.0432 & 0.9071 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S_{pooled}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0328 & 0.0378 \\ 0.0378 & 1.1458 \end{bmatrix}$$

olsun. Buna göre $\underline{x}_0' = [27 \ 10]$ gözlemine sahip birim hangi kitleye atanır?

Çözüm 26 :

$$\begin{aligned}y &= \underline{l}'\underline{x} \\ &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) S_{pooled}^{-1} \underline{x} \\ &= [8.23 \quad 0.92] \begin{bmatrix} 0.0328 & 0.0378 \\ 0.0378 & 1.1458 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 0.3049x_1 + 1.3649x_2\end{aligned}$$

Buradan $\underline{l}' = [0.3049 \quad 1.3649]$ olduğu açıktır.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \frac{1}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' S_{pooled}^{-1} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ &= \frac{1}{2}[0.3049 \quad 1.3649] \begin{bmatrix} 46.55 \\ 19.2 \end{bmatrix} \\ &= 20.2005\end{aligned}$$

dir.

Buradan sınıflandırma bölgeler

$$R_1 : y \geq 20.2005$$

$$R_2 : y < 20.2005$$

olarak elde edilir.

$$y_0 = \underline{l}'\underline{x}_0 = [0.3049 \quad 1.3649] \begin{bmatrix} 27 \\ 10 \end{bmatrix} = 21.8824 > 20.2005 \quad \text{olduğundan gözlem } \Pi_1$$

kitlesine atanır.

Örnek 27 :

Aşağıda verilen değerlere göre minimum ECM yöntemini kullanarak \underline{x}_0 gözlemini sınıflandırınız.

| | | Doğru kitle | |
|-----------------------|---------|------------------------------|------------------------------|
| | | Π_1 | Π_2 |
| Sınıflandırılan kitle | Π_1 | 0 | $C(1 2) = 6$ |
| | Π_2 | $C(2 1) = 5$ | 0 |
| | | $p_1 = 0.3$ | $p_2 = 0.7$ |
| | | $f_1(\underline{x}_0) = 0.8$ | $f_2(\underline{x}_0) = 0.5$ |

Çözüm 27 :

$$k=1 \text{ için } p_2 f_2(\underline{x}_0) C(1|2) = 0.7(0.5)6 = 2.1$$

$$k=2 \text{ için } p_1 f_1(\underline{x}_0) C(2|1) = 0.3(0.8)5 = 1.2$$

En küçük değer $k=2$ için karşımıza çıktığından \underline{x}_0 gözlemine ait birim, Π_2 kitlesine atanır.

Örnek 28 : Π_1 ve Π_2 sırasıyla $N_2(\mu_1, \Sigma)$ ve $N_2(\mu_2, \Sigma)$ kitleleri olsun. Kitle parametreleri

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiş olsun. Buna göre Fisher'in lineer diskriminant fonksiyonunu elde ederek, $\underline{x}'_0 = (1 \ 2)$ değerine sahip birim hangi kitleye atanacağına karar veriniz.

Çözüm 28:

Fisher'in lineer diskriminant fonksiyonu

$$Y = \underline{l}'\underline{X} = [\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2]' \Sigma^{-1} \underline{X}$$

ve orta nokta

$$m = \frac{1}{2}(\underline{\mu}_{1Y} + \underline{\mu}_{2Y}) = (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2)$$

olmak üzere

$y_0 = \underline{l}'\underline{x}_0 \geq m$ ise \underline{x}_0 gözlemine ait birim Π_1 kitlesine, aksi halde Π_2 kitlesine atanır. Buradan

$$[\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2] = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

Fisher'in lineer diskriminant fonksiyonu

$$\begin{aligned} Y &= \underline{l}'\underline{X} = [\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2]' \Sigma^{-1} \underline{X} \\ &= [2 \ 5] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ 1] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= 2X_1 + X_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} y_0 &= 2x_{10} + x_{20} \\ &= 2(1) + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ve orta nokta

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}(\underline{\mu}_{1Y} + \underline{\mu}_{2Y}) \\ &= \frac{1}{2}(9 + 0) = 4.5 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$y_0 = 4 < m = 4.5$ olduğundan \underline{x}_0 gözlemine ait birim, Π_2 kitlesine atanır.