KONU 2: DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN GENEL YAPISI

2.1. Matematiksel Model

Uygulamalı matematiğin bir alanı olan matematiksel programlama, verilen herhangi bir fonksiyonun en iyi değerinin (minimum ya da maksimum) elde edilmesini hedefler. n sayıda karar değişkeninden oluşan bir karar vektörü $\mathbf{X}=\left[X_1\ X_2 \ldots X_n\right]'$ biçiminde tanımlı olmak üzere, bir matematiksel programlama problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\min/\max f\left(\mathbf{X}\right) \tag{2.1}$$

$$g_i\left(\mathbf{X}\right)\left\{\leq\,,\geq\,,=\right\}b_i \;\;,\;\; i=1,2,\ldots,m \tag{2.2}$$

$$\mathbf{X}\subset R^n. \tag{2.3}$$

Burada, (2.1) ifadesi ile amaç fonksiyonu, (2.2) ifadesi ile m sayıda kısıt fonksiyonu belirtilmiştir. (2.3) ifadesi ise karar vektörü ile ilgili tanımlı kısıtları göstermektedir.

Bir d.p.p.' de amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları doğrusal olacağından, d.p.p.' nin matematiksel yapısı açık olarak

$$\begin{array}{l}
\min/\max f\left(\mathbf{X}\right)=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n \\
a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots+a_{1n}X_n\left\{\leq\,,\geq\,,=\right\}b_1 \\
a_{21}X_1+a_{22}X_2+\ldots+a_{2n}X_n\left\{\leq\,,\geq\,,=\right\}b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\ldots+a_{mn}X_n\left\{\leq\,,\geq\,,=\right\}b_m \\
\qquad\qquad X_1,X_2,\ldots,X_n\geq 0
\end{array} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, c_j, b_i ve a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, d.p.p.' nin model parametreleri olup,

c_j : j. karar değişkeninin fiyat parametresi, $j=1,2,\ldots,n$

(X_j' nin bir biriminin amaç fonksiyonuna etkisi),

b_i : $i.$ kısıtın sağ yan değeri (kaynak miktarı, ihtiyaç değeri), $i=1,2,...,m$

a_{ij} : Bir birim X_j için gerekli $i.$ girdi değeri

olarak tanımlanır. (2.4) ile tanımlı d.p.p. modeli genel olarak

$$\begin{aligned} &\min/\max f(\mathbf{X})=\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \{\leq, \geq, =\} b_i \quad , \quad i=1,2,...,m \\ &X_j \geq 0 \quad , \quad j=1,2,...,n \end{aligned} \tag{2.5}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bir d.p.p.' nin yasal modelleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} &\max\ f(\mathbf{X})=\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i \quad , \quad i=1,2,...,m \\ &X_j \geq 0 \quad , \quad j=1,2,...,n \end{aligned} \tag{2.6}$$

ve

$$\begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{X})=\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i \quad , \quad i=1,2,...,m \\ &X_j \geq 0 \quad , \quad j=1,2,...,n \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.4) ile tanımlı d.p.p. modeli matris gösterimi ile

$$\begin{aligned} &\min/\max\ f(\mathbf{X})=\mathbf{cX} \\ &A\mathbf{X}\{\leq, \geq, =\}\mathbf{b} \\ &\mathbf{X}\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır. Burada, $\mathbf{c}=[c_1\ c_2 \ldots c_n]$ fiyat vektörü, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ teknoloji matrisi (katsayı matrisi) ve $\mathbf{b}=[b_1\ b_2 \ldots b_m]$, sağ yan vektörüdür. (2.6) ve (2.7) ile tanımlı yasal biçimdeki DP modelleri matris gösterimi ile

$$\begin{aligned} \max\ & f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.9}$$

ve

$$\begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X} \ge \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

biçiminde yazılır. Bir d.p.p.' nin standart biçimi açık olarak

$$\begin{aligned} \min/\max\ & f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \\ & X_j \ge 0 \qquad , \quad j = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{2.11}$$

ifadesi ile ve matris gösterimi kullanılarak

$$\begin{aligned} \min/\max\ & f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanır.

2.2. Bir Doğrusal Programlama Modelinin Sağlaması Gereken Özellikler

Bir problemi d.p.p. olarak tanımlayabilmek için (problem için "doğrusal" tanımının yapılabilmesi için), problemin bazı özellikleri sağlaması gerekir.

2.2.1. Oransallık

Problemin matematiksel modelinde, amaç fonksiyonunun ve eşitlik/eşitsizlik ile tanımlı kısıt fonksiyonlarının içerdiği değişkenler birinci dereceden olmalıdır. Buna göre, c_j, $j = 1,2,...,n$ katsayıları sabit ve X_j' lerin sadece birinci dereceden kuvvetlerinin yer alması gerekir. Benzer olarak, A katsayılar matrisinde yer alan a_{ij}' ler de değişmez olmalı ve a_{ij}' lerin çarpanları olarak yer alan X_j' lerin de birinci dereceden kuvvetleri yer almalıdır. Böylece, her değişkenin amaç fonksiyonuna veya kısıt fonksiyonlarına katkısı doğrudan değişkenin seviyesi ile orantılı olacaktır.

2.2.2. Toplamsallık

Karar değişkenlerinin birbirine etkisi olmadığı varsayımına dayanmaktadır. Toplam katkı ve toplam kaynak kullanımının ölçüsü, ilgili karar değişkenlerinin değerlerinin (katsayılar ile birlikte) toplamlarından oluşuyorsa ve bu özellik tüm kaynaklar için geçerli ise, ele alınan problem toplamsallık özelliği taşıyor denir. Bu özellik, katkı oluşumu ve kaynak kullanımı yönü ile aynı birimlerle ifade edilebilirlik anlamındadır.

2.2.3. Bölünebilirlik

Problemde tanımlı karar değişkenleri, X_j, $j = 1,2,...,n$, her türlü reel değeri alabiliyorsa, bölünebilirlik özelliği sağlanıyor demektir. En genel anlamda, $X_j \in R$ olması demektir. Bu özellik genellikle eksi olmama veya negatif olmama olarak adlandırılmaktadır ve problemdeki bütün karar değişkenleri için $X_j \geq 0$, $j = 1,2,...,n$ gösterimi kullanılmaktadır.

2.2.4. Belirlilik

Problemin tüm parametrelerinin ($\mathbf{c}, \mathbf{b}$ ve A) biliniyor olmasına belirlilik özelliği denir. Bu parametrelerin bilinen sabitler olduğu varsayımı ile birlikte, bu değerlerin hesaplama süresi boyunca sabit kalacağı da varsayılır. Oysaki gerçek hayatta bu parametrelerin bir kısmı gelecek zaman içinde sabit kalmamaktadır. Problemin çözümü için gelecekteki parametrelere ilişkin ancak tahmin değerleri kullanılarak hesaplama yapılabilecektir. Bu durumda da belirsizlik ortaya çıkmaktadır. Belirsizliğin etkisini gidermek üzere, d.p.p.' de duyarlılık analizleri uygulanmaktadır. Duyarlılık analizleri ile en iyi çözüm değeri elde edilmiş probleme ait parametrelerin değişim aralıkları belirlenmektedir.

Yukarıda açıklanan oransallık ve toplanabilirlik özellikleri DP için yeterlidir. Örneğin, bölünebilirlik özelliği sağlanmadığında “Tamsayılı DP”, belirlilik özelliği sağlanmadığında ise “Stokastik DP” uygulanabilir.