KONU 6: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ – III

6.1. Simpleks Tablo

Simpleks algoritmasında en iyi çözüm, verilen d.p.p. için bir temel uygun çözümden başlanarak, ardışık sayısal işlemlerle araştırılır. Bu işlemler, temel değişken vektöründe olmadığı halde amaç fonksiyonunu istenilen yönde etkileyen değişkenleri araştırmak ve temel değişken vektörüne uygun bir değişkenin alınması biçiminde işlemleri yinelenmektedir. Ardışık sayısal işlemlerde, temele alınacak ve temelden çıkacak değişkenleri belirlemede kolaylık sağlaması, ayrıca en iyi çözüm için "yok", "tek", "birden fazla", "sınırsız" sonuçlarının rahatlıkla elde edilebilmesi amacıyla Simpleks algoritmasından yararlanılarak, tablo kullanılarak çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu amaçla kullanılan tablolara "Simpleks Tablosu" denilmektedir.

En iyi çözümü elde edilmek istenilen d.p.p.

$$\begin{aligned} \min\ Z &= \mathbf{cX} \\ A\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.1}$$

biçiminde standart halde tanımlı olsun. Bu probleme ilişkin simpleks tablosu aşağıdaki gibidir.

			c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	...	$\mathbf{y}_k$	...	$\mathbf{y}_n$
C_{B1}	X_1	X_{B1}	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1n}
C_{B2}	X_2	X_{B2}	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	...	y_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Br}	X_r	X_{Br}	y_{r1}	y_{r2}	...	y_{rk}	...	y_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Bm}	X_m	X_{Bm}	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mk}	...	y_{mn}
		Z	Z_1-c_1	Z_2-c_2	...	Z_k-c_k	...	Z_n-c_n

Burada,

C_B : Temelde yer alan değişkenlere ilişkin fiyat kolonudur.

T_V : Temelde yer alan değişkenlerin kolonudur.

$\mathbf{X}_B$: Temel uygun çözüm değeri kolonudur.

Z : Amaç fonksiyonu değeridir.

$\mathbf{y}_j$: Her bir değişkene ilişkin $\mathbf{y}_j = B^{-1}\mathbf{a}_j$, $j = 1,2,...,n$ ifadesi ile hesaplanır.

c_j : Standart biçimde tanımlı d.p.p.'ne ilişkin değişkenlere ait fiyat değerleridir.

$Z_j - c_j$: En iyilik ölçütü kontrol edilir, $j = 1,2,...,n$.

(En küçükleme probleminde $Z_j - c_j \leq 0$ ve en büyükleme probleminde $Z_j - c_j \geq 0$ olması istenir.)

(6.1) ifadesi ile tanımlı d.p.p.' de gerekli ayrışımlar yapılarak, temel değişkenlerin temel dışı değişkenler biçiminde ifade edilebileceği simpleks algoritmasında

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{X}_N \tag{6.2}$$

biçiminde gösterildi. $\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$ olduğundan, $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ dir. $\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ ise, bir temel uygun çözüm (uç nokta) elde edilir.

$$\begin{aligned} Z - \mathbf{c}\mathbf{X} &= 0 \\ Z - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix} &= 0 \\ Z - \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B - \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N &= 0 \\ Z - \mathbf{c}_B\left(B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{X}_N\right) - \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N &= 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

olup,

$$Z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N \tag{6.4}$$

dır. Böylece, amaç fonksiyonu temel dışı değişkenlerin fonksiyonu olarak yazılmış olur. $\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$ olduğundan, amaç fonksiyon değeri

$$Z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} \tag{6.5}$$

olur.

Simpleks tablo ile yapılacak en iyileme çözümlemesi aşağıdaki adımlar ile ifade edilebilir.

Adım 1: Başlangıç simpleks tablo oluşturulur.

(6.1) ifadesi ile verilen d.p.p. modeli, uygun işlemlerden sonra sağ yan değerler için $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ve A katsayılar matrisinde bir birim matris olacak biçimde düzenlenir. Birim matrise karşı gelen değişkenler, temel değişkenler olmak üzere simpleks tablo düzenlenir. Tabloda temel dışı değişkenlere karşı gelen değerler sıfır olmalıdır. (6.1) ile tanımlı d.p.p. modelinde kısıtlar eşitlik biçiminde iken A katsayılar matrisinde bir birim matris yok ise, modele yeni değişken eklenmesi (yapay değişken kullanılması) ile birim matris oluşturulur. Bu yöntemler Konu 7' de anlatılacak olan "Charnes'in M Yöntemi (Büyük M Yöntemi)" ve "İki Evreli Yöntem" dir.

Adım 2: En iyilik ölçütünün sağlanıp sağlanmadığına bakılır.

(6.1) ile tanımlı d.p.p. modeli için simpleks tablonun alt satırında yer alan tüm $z_j - c_j \leq 0$ ise, en iyilik ölçütü sağlanmıştır. Tabloda bulunan temel değişkenlerin aldığı değerler en iyi çözüm değerini verir. En az bir temel dışı değişkene ilişkin $z_j - c_j = 0$ ise, birden fazla uç noktada en iyi çözüm var demektir (seçenek/alternatif çözüm). En iyilik koşulları sağlanmıyor ise, Adım 3' e geçilir.

Adım 3: Temele alınacak değişken belirlenir.

$Z_k - c_k = \max\left\{Z_j - c_j : \left(Z_j - c_j\right) > 0\right\}$ ölçütü kullanılarak temele alınacak değişken belirlenir. Bu değişken, X_k olsun. X_k değişkeninin bulunduğu kolon seçilerek, Adım 4' e geçilir. Birden fazla değişkenin $Z_j - c_j$ değerlerinin aynı olması durumunda bunlardan keyfi biri seçilir.

Adım 4: Temelden çıkacak değişken belirlenir.

X_k değişkeninin bulunduğu kolon $\mathbf{y}_k$ olup,

$$\mathbf{y}_k = \left[y_{1k} \;\; y_{2k} \;\; .... \; y_{rk} \; ... \; y_{mk}\right]'$$

dır. Temeldeki değişkenlerin aldığı değerler $\mathbf{X}_B$' ye bağlı olarak

$$u_k = y_{1k}X_{B1} + y_{2k}X_{B2} + ... + y_{rk}X_{Br} + ... + y_{mk}X_{Bm}$$

$$
\begin{aligned}
y_{rk}X_{Br} &= u_k - y_{1k}X_{B1} - y_{2k}X_{B2} \dots - y_{mk}X_{Bm} \\
&= u_k - \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ik}X_{Bi}
\end{aligned}
$$

$$
X_{Br} = \frac{1}{y_{rk}}u_k - \frac{1}{y_{rk}} \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ik}X_{Bi} \quad , \quad y_{rk} > 0
$$

$$
\begin{aligned}
u_j &= y_{1j}X_{B1} + y_{2j}X_{B2} + \dots + y_{rj}X_{Br} + \dots + y_{mj}X_{Bm} \\
&= y_{1j}X_{B1} + y_{2j}X_{B2} + \dots + y_{rj}\left(\frac{1}{y_{rk}}u_k - \frac{1}{y_{rk}} \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ik}X_{Bi} \right) + \dots + y_{mj}X_{Bm} \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ij}X_{Bi} + y_{rj}\left(- \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} X_{Bi} + \frac{1}{y_{rk}}u_k \right) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} \left(y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) X_{Bi} + \frac{y_{rj}}{y_{rk}}u_k
\end{aligned}
$$

Yeni değerler:

$$
\begin{cases}
\hat{X}_{Bi} = X_{Bi} & , \quad i \neq r \\
\hat{X}_{Br} = u_k & , \quad i = r
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{rj}\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} & , \quad i \neq r \\[2ex]
\hat{y}_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}} & , \quad i = r
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_j - c_j &= \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{y}}_j - c_j \\
&= \left(\sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} c_{Bi}\hat{y}_{ij} + c_{Br}\hat{y}_{rj} \right) - c_j \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} c_{Bi}\left(y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}}c_{Br} - c_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{c}_{Bi} = c_{Bi} & , \quad i \neq r \\
\hat{c}_{Br} = c_k & , \quad i = r
\end{cases}
$$

Eğer, X_k değişkeninin bulunduğu kolon için $\mathbf{y}_k \leq 0$ ise, d.p.p.' nin sınırsız çözüm durumu söz konusudur.

Burada, y_{rk} pivot eleman olarak adlandırılır. Oluşturulacak yeni simpleks tablo aşağıdaki gibidir:

			c_1	...	c_k	...	c_n
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	...	$\mathbf{y}_k$	...	$\mathbf{y}_n$
C_{B1}	X_1	$X_{B1}-y_{1k}\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{11}-y_{r1}\dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{1n}-y_{rn}\dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}$
C_{B2}	X_2	$X_{B2}-y_{2k}\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{21}-y_{r1}\dfrac{y_{2k}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{2n}-y_{rn}\dfrac{y_{2k}}{y_{rk}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Br}	X_r	$\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	...	1	...	$\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Bm}	X_m	$X_{Bm}-y_{mk}\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{m1}-y_{r1}\dfrac{y_{mk}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{mn}-y_{rn}\dfrac{y_{mk}}{y_{rk}}$
		$Z-\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}(z_k-c_k)$	$(Z_1-c_1)-\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}(Z_k-c_k)$	...	0	...	$(Z_n-c_n)-\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}(Z_k-c_k)$

Simpleks tablosunda yeni satır işlemleri yapılarak, tablo yukarıdaki biçimde düzenlenir.
Adım 2' ye dönülür.

Algoritmanın 1. Adımı bir defa gerçekleştirilerek, işlemler Adım 2 - Adım 5 arasında en iyilik ölçütü sağlanıncaya kadar tekrarlanır.

Örnek:

$$
\begin{aligned}
P:\ \max\ Z &= 3X_1+2X_2 \\
2X_1+3X_2 &\le 12 \\
6X_1+3X_2 &\le 24 \\
X_1, X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin simpleks tablo ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal d.p.p. standart hale getirilir.

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
& 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 12 \\
& 6X_1 + 3X_2 + X_4 = 24 \\
& X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$B = [\mathbf{a}_3 \ \ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Tablo-I			3	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_3	12	2	3	1	0	
0	X_4	24	6	3	0	1	
		$Z=0$	-3	-2	0	0	≥ 0 olmalı

X_1 değişkeni temele alınır.

$\min\left\{\dfrac{12}{2}, \dfrac{24}{6}\right\} = 4$ ölçütüne göre, X_4 değişkeni temelden çıkar.

Burada, 6 pivot elemandır.

Tablo- II			3	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_3	4	0	2	1	-1/3	
3	X_1	4	1	1/2	0	1/6	
		$Z=12$	0	-1/2	0	1/2	≥ 0 olmalı

X_2 değişkeni temele alınır.

$\min\left\{\dfrac{4}{2}, \dfrac{4}{1/2}\right\} = 2$ ölçütüne göre, X_3 değişkeni temelden çıkar.

Burada, 2 pivot elemandır.

Tablo- III			3	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
2	X_2	2	0	1	1/2	-1/6	
3	X_1	3	1	0	-1/4	1/4	
		$Z=13$	0	0	1/4	5/12	≥ 0 sağlandı

Tablo-III' te görüldüğü gibi en iyilik ölçütü sağlandı.

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ve } Z^* = 13$$

bulunur.