KONU 10: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİNDE DUALLİK KURAMI - II

Teorem 4: Bir d.p.p.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \max\ Z = \mathbf{cX} \\
& A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{X}\ \textit{işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$
\begin{aligned}
D: \quad & \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} = \mathbf{c}' \\
& \mathbf{V}\ \textit{işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
$$

dır.

Teorem 5: Bir d.p.p.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \max\ Z = \mathbf{cX} \\
& \sum_j a_{ij} X_j \le b_i \ \ ,\ i = 1,2,\dots,k \\
& \sum_j a_{ij} X_j = b_i \ \ ,\ i = k+1, k+2,\dots,m \\
& X_j \ge 0 \ \ ,\ \ j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$
\begin{aligned}
D: \quad & \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} \ge \mathbf{c}' \\
& V_i \ge 0 \ \ ,\ i = 1,2,\dots,k \\
& V_i\ \ \textit{işareti belirtilmemiş}\ ,\ i = k+1, k+2,\dots,m
\end{aligned}
$$

dır.

Teorem 6: Dualin duali primali verir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
P: \ & \min\ Z = \mathbf{cX} & & & D: \ & \max\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A\mathbf{X} \ge \mathbf{b} & & \Rightarrow & & A'\mathbf{V} \le \mathbf{c}' \\
& \mathbf{X} \ge \mathbf{0} & & & & \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Dual modelde katsayılar (-1) ile çarpılırsa,

$$
\begin{aligned}
D: \ & \min\ Z = -\mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& -A'\mathbf{V} \ge -\mathbf{c}' \\
& \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu dual modelin duali alınırsa

$$\begin{array}{lcl} D:\ \max\ Z = -\mathbf{cX} & & \min\ Z = \mathbf{cX} \\ -A'\mathbf{X} \le -\mathbf{b} & \Rightarrow & A\mathbf{X} \ge \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \ge \mathbf{0} & & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

primal modele ulaşılır.

Teorem 7:

$$\begin{array}{l} P:\ \max\ Z = \mathbf{cX} \\ \quad A\mathbf{X} \le \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

biçiminde tanımlı primal modelin bir uygun çözümü $\mathbf{X}_0$,

$$\begin{array}{l} D:\ \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\ \quad A'\mathbf{V} \ge \mathbf{c}' \\ \quad \mathbf{V} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

dual modelin bir uygun çözümü $\mathbf{V}_0$ ise,

$$\mathbf{cX}_0 \le \mathbf{b}'\mathbf{V}_0$$

dir. Buna göre, primal modelin amaç fonksiyon değeri, dual modelin amaç fonksiyon değerinden küçüktür veya eşittir.

Teorem 8:

$$\begin{array}{l} P:\ \max\ Z = \mathbf{cX} \\ \quad A\mathbf{X} \le \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

biçiminde tanımlı primal modelin bir uygun çözümü $\hat{\mathbf{X}}$,

$$\begin{array}{l} D:\ \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\ \quad A'\mathbf{V} \ge \mathbf{c}' \\ \quad \mathbf{V} \ge \mathbf{0} \end{array}$$

dual modelin bir uygun çözümü $\hat{\mathbf{V}}$ olsun. Bu iki uygun çözümün amaç fonksiyonuna verdiği değer birbirine eşit ($\mathbf{c}\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{b}'\hat{\mathbf{V}}$) ise, $\hat{\mathbf{X}}$ ve $\hat{\mathbf{V}}$ sırasıyla primal modelin ve dualin en iyi çözümleridir.

Teorem 9: Primal ya da dual modellerden herhangi biri en iyi çözüme sahip ise, diğeri de en iyi çözüme sahiptir ve her iki modelin amaç fonksiyon değerleri aynıdır.

Örnek: Aşağıdaki primal modellerin, (i) dualini ve (ii) yasal biçimde dualini alınız.

a. $P:\ \max\ Z = X_1 + X_2$

$$3X_1 + 4X_2 = 12$$
$$X_1 - 2X_2 = 4$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

i. $D:\ \min\ Z = 12V_1 + 4V_2$

$$3V_1 + V_2 \geq 1$$
$$4V_1 - 2V_2 \geq 1$$
V_1, V_2 *işareti belirtilmemiş*

ii. $P:\ \max\ Z = X_1 + X_2$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 12$$
$$-3X_1 - 4X_2 \leq -12$$
$$X_1 - 2X_2 \leq 4$$
$$-X_1 + 2X_2 \leq -4$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$D:\ \min\ Z = 12V_1 + 4V_2 + 4V_3 - 4V_4$

$$3V_1 - 3V_2 + V_3 - V_4 \geq 1$$
$$4V_1 - 4V_2 - 2V_3 + 2 - 4V_4 \geq 1$$
$$V_1, V_2, V_3, V_4 \geq 0$$

b. $P:\ \max\ Z = 2X_1 + 3X_2$

$$X_1 + 2X_2 \geq 5$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$4X_1 + 5X_2 = 7$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

i. $D:\ \min\ Z = 5V_1 + 6V_2 + 7V_3$

$$-V_1 + 5V_2 + 4V_3 \geq 2$$
$$-2V_1 + 3V_2 + 5V_3 \geq 3$$
$V_1, V_2 \geq 0$, V_3 *işareti belirtilmemiş*

ii. $P:\ \max\ Z = 2X_1 + 3X_2$

$$-X_1 - 2X_2 \leq -5$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$4X_1 + 5X_2 \leq 7$$
$$-4X_1 - 5X_2 \leq -7$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$D:\ \min\ Z = -5V_1 + 6V_2 + 7V_3 - 7V_4$

$$-V_1 + 5V_2 + 4V_3 - 4V_4 \geq 2$$
$$-2V_1 + 3V_2 + 5V_3 - 5V_4 \geq 3$$
$$V_1, V_2, V_3, V_4 \geq 0$$

c. $P:\ \min\ Z=-2X_1+X_2-3X_3$

$$\begin{aligned}&2X_1-X_2+X_3\geq 5\\&X_1+X_2-X_3=-4\\&X_1-X_2+3X_3\leq 6\\&X_1,\ X_2\geq 0\ \ ,\ X_3\ \textit{işareti belirtilmemiş}\end{aligned}$$

i. $D:\ \max\ Z=5V_1-4V_2-6V_3$

$$\begin{aligned}&2V_1+V_2-V_3\leq -2\\&-V_1+V_2+V_3\leq 1\\&V_1-V_2+3V_3=-3\\&V_1,\ V_3\geq 0\ ,\ V_2\ \textit{işareti belirtilmemiş}\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}P:\ &\min\ Z=-2X_1+X_2-3\left(X_3'-X_3''\right)\\&2X_1-X_2+\left(X_3'-X_3''\right)\geq 5\\&X_1+X_2-\left(X_3'-X_3''\right)\geq -4\\&-X_1-X_2+\left(X_3'-X_3''\right)\geq 4\\&-X_1+X_2-3\left(X_3'-X_3''\right)\geq -6\\&X_1,\ X_2,X_3',X_3''\geq 0\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}D:\ &\max\ Z=5V_1-4V_2+4V_3-6V_4\\&2V_1+V_2-V_3-V_4\leq -2\\&-V_1+V_2-V_3+V_4\leq 1\\&V_1-V_2+V_3-3V_4\leq -3\\&-V_1+V_2-V_3+3V_4\leq 3\\&V_1,V_2,V_3,V_4\geq 0\end{aligned}$$