KONU 11: DUAL MODELİN EKONOMİK YORUMU

Bir primal-dual model ilişkisi

$$P: \max\ Z = \mathbf{cX} \qquad\qquad D: \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V}$$
$$A\mathbf{X} \le \mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad A'\mathbf{V} \ge \mathbf{c}'$$
$$\mathbf{X} \ge \mathbf{0} \qquad\qquad\qquad \mathbf{V} \ge \mathbf{0}$$

biçiminde tanımlı olsun. Primal modelin en iyi temeli B ve buna ilişkin fiyat vektörü $\mathbf{c}_B$ olsun.

$$Z = \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{V}'\mathbf{b} \tag{11.1}$$

olduğundan, (11.1) eşitliğinin $\mathbf{b}$ ’ ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{c}_B B^{-1} = \mathbf{V}' \tag{11.2}$$

elde edilir. Buna göre, sağ yan değer b_i , $i = 1,2,...,m$ de yapılacak bir birimlik artışın amaç fonksiyonunda oluşturacağı değişiklik miktarı dual değişken V_i , $i = 1,2,...,m$ ile verilir. Ekonomik olarak, $\mathbf{V}$ dual vektörü, $\mathbf{b}$ ihtiyaçlar vektörünün “gölge fiyatları” olarak adlandırılır. Gölge fiyat, herhangi bir üretim kaynağı miktarının bir birim artırılması veya azaltılması durumunda amaç fonksiyonunda meydana gelecek artış veya azalış olarak tanımlanır.

b_i , $i = 1,2,...,m$, $i.$ kısıtın sağ yan değeri olmak üzere, bu $i.$ kısıtın gölge fiyatı, optimal Z değerini artıran (maksimum problemde) ya da azaltan (minimum problemde) miktardır. Bir kaynağın gölge fiyatı, o kaynağın marjinal verimini gösterir. Bir d.p.p.’ de bir kısıt ile ilgili marjinal değer, o kısıtın sağ yan değerinin bir birim artırılması halinde amaç fonksiyonunun yeni değeri ile orijinal problemdeki optimal değeri arasındaki fark olarak tanımlanır. Bu marjinal değere de “gölge fiyat” denir.

Verilen d.p.p. için optimal çözüme ulaşıldığında, $i.$ kaynaktaki değişim primal modelin amaç fonksiyonunu etkileyecektir. V_i , $i = 1,2,...,m$, $i.$ kaynakta bir birim artış yapıldığında primal modelin amaç fonksiyonunun en iyi değerinin $i.$ kaynaktaki artış karşısında değişimini vermektedir. $i.$ kaynaktaki bir birimlik artış, amaç fonksiyonunun en iyi çözümüne karşı gelen değerinde V_i kadar bir artışa neden olduğundan, karar vericinin bu kaynağın bir birim artışı için ödemeye hazır olacağı fiyat en fazla V_i kadar ($i.$ kaynağın gölge fiyatı kadar) olmalıdır.

NOT 1: Verilen bir primal d.p.p. simpleks tablo ile çözülürse, primal problemin en iyi çözüm tablosundan, dual d.p.p.' nin en iyi çözümü bulunabilir. Primal problemin optimal çözüm tablosundaki gevşek değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$, $j = 1,2,...,m$ değerleri, dual değişken değerleridir.

NOT 2: Bir primal model sınırsız çözüme sahipse, dual modelin uygun çözümü yoktur. Bir primal modelin uygun çözümü yoksa, dual model sınırsız çözüme sahiptir.

Örnek 1:

$$
\begin{aligned}
P:\ \max\ Z &= 8X_1 + 9X_2 + 4X_3 \\
X_1 + X_2 + 2X_3 &\le 2 \\
2X_1 + 3X_2 + 4X_3 &\le 3 \\
7X_1 + 6X_2 + 2X_3 &\le 8 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı primal modelin en iyi çözüm tablosu aşağıda verilmiştir.

Optimal tablo			8	9	4	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$
0	X_4	7/9	0	0	4/3	1	-1/9	-1/9
9	X_2	5/9	0	1	8/3	0	7/9	-2/9
8	X_1	2/3	1	0	-2	0	-2/3	1/3
		$Z = 31/3$	0	0	4	0	5/3	1/3

Bu tablodan yararlanarak, dual modelin en iyi çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

Verilen primal model standart halde

$$
\begin{aligned}
P:\ \max\ Z &= 8X_1 + 9X_2 + 4X_3 \\
X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 2 \\
2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_5 &= 3 \\
7X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_6 &= 8 \\
X_i \ge 0\ ,\ i &= 1,2,...,6
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\8\end{bmatrix}$$

$B=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6\end{bmatrix}=I$ başlangıç temel matristir**.**

Dual model,

$$\begin{aligned}D:\ \ \min\ Z &= 2V_1+3V_2+8V_3\\ V_1+2V_2+7V_3 &\geq 8\\ V_1+3V_2+6V_3 &\geq 9\\ 2V_1+4V_2+2V_3 &\geq 4\\ V_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,3\end{aligned}$$

dir.

$$\mathbf{V}'=\mathbf{c}_B B^{-1}$$

eşitliğinden dual değişken değerleri belirlenir. Burada,

$\mathbf{c}_B$: Primal modelin en iyi çözüm tablosundaki temel değişkenlerin fiyat değerleri

B^{-1} : Primal modelin en iyi çözüm tablosunda ilk başlangıç temele ilişkin vektörlerin oluşturduğu matris

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}' &= \mathbf{c}_B B^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 9 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/9 & -1/9\\ 0 & 7/9 & -2/9\\ 0 & -2/9 & 1/3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 5/3 & 2/3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Dual değişken değerleri primal problemin en iyi çözüm tablosundaki gevşek değişkenlere ilişkin Z_j-c_j değerleridir.

Optimal tablo			8	9	4	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$
0	X_4	7/9	0	0	4/3	1	-1/9	-1/9
9	X_2	5/9	0	1	8/3	0	7/9	-2/9
8	X_1	2/3	1	0	-2	0	-2/3	1/3
		$Z=31/3$	0	0	4	0	5/3	2/3

Buradan, dual modelin amaç fonksiyon değeri,

$$\min\ Z = 2\times 0 + 3\times\frac{5}{3} + 8\times\frac{2}{3} = \frac{31}{3}$$

bulunur.

$V_1 = 0 \;\Rightarrow\;$ 1. kısıtın sağ yan değerinde yapılacak bir birimlik artış amaç fonksiyonunu etkilemez.

$V_2 = \frac{5}{3} \;\Rightarrow\;$ 2. kısıtın sağ yan değerinde yapılacak bir birimlik artış amaç fonksiyonunu $\frac{5}{3}$ birim etkiler (artırır).

$V_3 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\;$ 3. kısıtın sağ yan değerinde yapılacak bir birimlik artış amaç fonksiyonunu $\frac{2}{3}$ birim etkiler (artırır).

Örnek 2:

$$\begin{aligned} D:\ \min\ & Z = 6V_1 + 8V_2 + 7V_3 + 15V_4 + V_5 \\ & V_1 + V_3 + 3V_4 \geq 4 \\ & V_2 + V_3 + V_4 - V_5 \geq 3 \\ & V_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,5 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dual modelin en iyi çözüm tablosu aşağıda verilmiştir.

Optimal tablo			6	8	7	15	1	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_7$
15	V_4	1/2	1/2	-1/2	0	1	1/2	-1/2	1/2
7	V_3	-1/2	-1/2	3/2	1	0	3/2	1/2	-3/2
		Z = 25	-2	-5	0	0	-4	-4	-3

Bu tablodan yararlanarak, primal modelin en iyi çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

Verilen dual model standart halde

$$
\begin{aligned}
D:\ \ \min\ Z &= 6V_1 + 8V_2 + 7V_3 + 15V_4 + V_5 + 0V_6 + 0V_7 \\
& V_1 + V_3 + 3V_4 - V_6 = 4 \\
& V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_7 = 3 \\
& V_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,7
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\ \ ,\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$B = [\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2] = I$ başlangıç temel matristir**.**

Simpleks tablo V_1 ve V_2 temel değişkenleri ile en iyi çözüm aramasına başlayıp, V_4 ve V_3 değişkenleri ile sonlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \mathbf{c}_B B^{-1} \\
&= [15\quad 7]\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \\
&= [4\quad 3]
\end{aligned}
$$

Primal model,

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \max\ Z &= 4X_1 + 3X_2 \\
& X_1 \leq 6 \\
& X_2 \leq 8 \\
& X_1 + X_2 \leq 7 \\
& 3X_1 + X_2 \leq 15 \\
& -X_2 \leq 1 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre,

$$\max\ Z = 4\times 4 + 3\times 3 = 25$$

bulunur.