

## KONU 12: DUAL SİMPLEKS YÖNTEM

$$P: \min Z = \mathbf{cX}$$

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

(12.1)

biçiminde tanımlı bir d.p.p.' de,  $B$  herhangi bir temel olsun. Bu temel için, simpleks tabloda tüm temel dışı değişkenlere ilişkin tüm  $\mathbf{Z} - \mathbf{c} \leq \mathbf{0}$  ise, problem için en iyilik koşulları (dual uygunluk) sağlanmıştır. Ayrıca bu temele ilişkin  $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  oluyorsa, aynı zamanda primal uygunluk da sağlanmıştır. Fakat, bazı durumlarda dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanmayabilir. Bu durumda bulunan  $\mathbf{X}_B$  çözümü en iyi olamaz. En iyilik koşullarını bozmadan,  $\mathbf{X}_B$  vektöründeki negatif değerleri pozitif hale getirmek için uygulanan yonteme "Dual Simpleks Yontem" denir. Bu yontemde çözüme, en iyilik koşullarını sağlayan ancak uygun olmayan bir temel ile başlanır. Bu durumdaki problemi her zaman bulmak kolay değildir. Bu nedenle dual simpleks yontemin, simpleks yontem gibi genel bir uygulama alanı yoktur. Özellikle duyarlılık çözümlenmesinde oldukça kullanışlı bir yontemdir.

(12.1) ifadesi ile tanımlı primal model için en iyilik ölçütünün sağlandığı ( $\forall Z_j - c_j \leq 0$  olması) tablo aşağıdaki gibi olsun.

			$c_1$	...	$c_j$	...	$c_k$	...	$c_n$
$C_B$	$T_V$	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	...	$\mathbf{y}_j$	...	$\mathbf{y}_k$	...	$\mathbf{y}_n$
$C_{B1}$	$X_1$	$X_{B1}$	$y_{11}$	...	$y_{1j}$	...	$y_{1k}$	...	$y_{1n}$
$C_{B2}$	$X_2$	$X_{B2}$	$y_{21}$	...	$y_{2j}$	...	$y_{2k}$	...	$y_{2n}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$C_{Br}$	$X_r$	$X_{Br}$	$y_{r1}$	...	$y_{rj}$	...	$y_{rk}$	...	$y_{rn}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$C_{Bm}$	$X_m$	$X_{Bm}$	$y_{m1}$	...	$y_{mj}$	...	$y_{mk}$	...	$y_{mn}$
		$Z$	$Z_1 - c_1$	...	$Z_j - c_j$	...	$Z_k - c_k$	...	$Z_n - c_n$

$\leq 0$  sağlandı

Dual uygunluğun sağlandığı yukarıdaki tabloda,

- i. Primal uygunluk da sağlanmış ( $\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ ) ise, en iyi çözüme ulaşılmıştır.
- ii. Primal uygunluk sağlanamamış (en az bir  $X_{Br} < 0$ ) ise,  $r$ . kolon ve bu satıra ilişkin  $n$  tane kolondan  $y_{rk} < 0$  olan kolon pivot eleman olarak seçilir. Dual uygunluğu bozmadan primal uygunluk sağlanıncaya kadar işlemlere devam edilir.

### 12.1. Dual Simpleks Algoritması

**Adım 1:** (12.1) ifadesi ile tanımlı primal problem için en iyilik koşullarını sağlayan bir  $B$  temeli bulunur.

**Adım 2:** Primal uygunluk da sağlanmış ( $\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ ) ise, durulur. Son bulunan çözüm en iyi çözümdür. Aksi halde,

$$X_{Br} = \min\{X_{Bi} : X_{Bi} < 0\} \quad (12.2)$$

ölçütüne göre temelden çıkacak değişken belirlenir.

**Adım 3:** Adım 2' de temelden çıkacak değişkene karar verdikten sonra ( $r$  değeri belirlendikten sonra),  $y_{rj}$  değerlerine bakılır. Eğer, tüm  $y_{rj} \geq 0$  ise, durulur. Bu durumda temele alınacak değişken belirlenemez. Verilen primal problemin sınırsız çözümü vardır. Buna göre dual problemin uygun çözümü yoktur. Eğer,  $y_{rj} < 0$  ise,

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right\} \quad (12.3)$$

ölçütüne göre temele alınacak değişken belirlenir. Burada,  $y_{rk}$  pivot elemandır. Simpleks yöntemde tanımlanan pivot eleman ile ilgili işlemler yapılarak Adım 2' den süreç yinelenir.

(12.1) ifadesinde primal problem en büyükleme problemi olduğunda, eşitlik (12.3) ile tanımlı temele alınacak değişken ile ilgili ölçüt

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right\} \quad (12.4)$$

biçiminde olur.

### Örnek 1:

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 60X_1 + 40X_2 \\ 5X_1 + 4X_2 &\geq 6 \\ 10X_1 + 4X_2 &\geq 8 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.'nin dual simpleks yöntem ile en iyi çözümünü bulunuz.

### Çözüm:

Verilen primal problem

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 60X_1 + 40X_2 \\ -5X_1 - 4X_2 &\leq -6 \\ -10X_1 - 4X_2 &\leq -8 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

biçimine dönüştürülür. Standart halde

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 60X_1 + 40X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ -5X_1 - 4X_2 + X_3 &= -6 \\ -10X_1 - 4X_2 + X_4 &= -8 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dır.

Tablo-I			60	40	0	0
$C_B$	$T_V$	$X_B$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
0	$X_3$	-6	-5	-4	1	0
0	$X_4$	-8	-10	-4	0	1
$Z = 0$			-60	-40	0	0

$\leq 0$  sağlandı

Tablo-I' e göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,

$$X_{Br} = \min\{X_{Bi} : X_{Bi} < 0\} = \min\{-6, -8\} = -8$$

olduğundan,  $X_4$  değişkeni temelden çıkar.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-60}{-10}, \frac{-40}{-4}\right\} = \min\{6, 10\} = 6$$

olduğundan,  $X_1$  değişkeni temele alınır.

Tablo-II			60	40	0	0
$C_B$	$T_V$	$X_B$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
0	$X_3$	-2	0	-2	1	-1/2
60	$X_1$	4/5	1	2/5	0	-1/10
$Z = 48$			0	-16	0	-6

$\leq 0$  sağlandı

Tablo-II' ye göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,  $X_3$  değişkeni temelden çıkar. Çünkü,  $X_3 = -2 < 0$  dır.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\} = \min \left\{ \frac{-16}{-2}, \frac{-6}{-1/2} \right\} = \min \{8, 12\} = 8$$

olduğundan,  $X_2$  değişkeni temele alınır.

Tablo-III			60	40	0	0
$C_B$	$T_V$	$X_B$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
40	$X_2$	1	0	1	1/2	1/4
60	$X_1$	2/5	1	0	1/5	-1/5
$Z = 64$			0	0	-8	-2

$\leq 0$  sağlandı

Tablo-III' e göre, dual uygunluk ve primal uygunluk sağlanmıştır. Buna göre,

$$x^* = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{ve} \quad Z^* = 64$$

olur.

### Örnek 2:

$$\begin{aligned}
 P: \max Z &= -6X_1 - 8X_2 \\
 4X_1 + 6X_2 &\leq 14 \\
 2X_1 + 2X_2 &\geq 10 \\
 -6X_1 + 10X_2 &\geq 12 \\
 X_1, X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin dual simpleks yöntem ile en iyi çözümünü bulunuz.

### Çözüm:

Verilen primal problem

$$\begin{aligned}
P: \max Z &= -6X_1 - 8X_2 \\
4X_1 + 6X_2 &\leq 14 \\
-2X_1 - 2X_2 &\leq -10 \\
6X_1 - 10X_2 &\leq -12 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

biçimine dönüştürülür. Standart halde

$$\begin{aligned}
P: \max Z &= -6X_1 - 8X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \\
4X_1 + 6X_2 + X_3 &= 14 \\
-2X_1 - 2X_2 + X_4 &= -10 \\
6X_1 - 10X_2 + X_5 &= -12 \\
X_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, 5
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -12 \end{bmatrix}$$

dır.

Tablo-I			-6	-8	0	0	0
$C_B$	$T_V$	$X_B$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$X_3$	14	4	6	1	0	0
0	$X_4$	-10	-2	-2	0	1	0
0	$X_5$	-12	6	-10	0	0	1
$Z = 0$			6	8	0	0	0

$\leq 0$  sağlandı

Tablo-I' e göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,

$$X_{Br} = \min\{X_{Bi} : X_{Bi} < 0\} = \min\{-10, -12\} = -12$$

olduğundan,  $X_5$  değişkeni temelden çıkar.

$X_5$  değişkeninin bulunduğu satırda (3. satırda)  $y_{32} = -10 < 0$  olduğundan,  $X_2$  değişkeni temele alınır.

Tablo-II			-6	-8	0	0	0
$C_B$	$T_V$	$X_B$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$X_3$	34/5	38/5	0	1	0	3/5
0	$X_4$	-38/5	-16/5	0	0	1	-1/5
-8	$X_2$	6/5	-3/5	1	0	0	-1/10
$Z = -48/5$			54/5	0	0	0	4/5

$\leq 0$  sağlandı

Tablo-II' ye göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,  $X_4$  değişkeni temelden çıkar. Çünkü,  $X_4 = -38/5 < 0$  dir.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\} = \max \left\{ \frac{54/5}{-16/5}, \frac{4/5}{-1/5} \right\} = \max \{-27/8, -4\} = -27/8$$

olduğundan,  $X_1$  değişkeni temele alınır.

Tablo-III			-6	-8	0	0	0
$C_B$	$T_V$	$X_B$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$X_3$	-25/4	0	0	1	19/8	1/8
-6	$X_1$	-19/8	1	0	0	-5/16	1/16
-8	$X_2$	21/8	0	1	0	-3/16	-1/16
$Z = 14/8$			0	0	0	27/8	1/8

$\leq 0$  sağlandı

Tablo-III' e göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,  $X_{Br} = \min \{ X_{Bi} : X_{Bi} < 0 \} = \min \{ -25/4, -19/8 \} = -25/4$  olduğundan,  $X_3$  değişkeni temelden çıkar. Fakat, temelden çıkacak değişkenin bulunduğu satırda (1. satır),  $y_{rj} < 0$  olan bir değişken yoktur. Bu durumda, verilen primal problemin sınırsız çözümü vardır.