IŞIK EĞRİSİ ANALİZİ

1. GİRİŞ

Yıldız astrofiziğinde, yıldız yapılarını belirleyen çok sayıda parametre mevcuttur. Bu parametrelerin belirlenmesinde, gözlemsel özellikler açısından sağladıkları kolaylıklar nedeniyle yakın çift yıldızlar ve özellikle örten çift yıldızlar bir ayrıcalığa sahiptir. Bunlar çekimsel kuvvetlerle birbirine bağlı olan ve ortak bir kütle merkezi etrafında Kepler yasalarına göre yörünge hareketi yapan en az iki yıldızdan oluşan sistemlerdir. Zamana karşı gösterdikleri ışık değişimlerinin, belli kuramlar altında çözümlenmesi sonucu fiziksel parametrelerine doğrudan ulaşılabilmektedir. Doğru fiziksel parametrelere ulaşabilmek için hiç kuşkusuz sağlıklı gözlemlerin yanı sıra hızlı, güvenilir ve gerçekçi fiziksel modellere dayalı çözüm yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir.

2. IŞIK EĞRİSİ ANALİZİ NEDİR?

Bir örten değişen yıldızın ışık eğrisinin biçimi kabaca; i yörünge eğikliği, r_1 ve r_2 bileşen yıldızların kesirsel yarıçapları, L_1 ve L_2 yıldızların kesirsel ışınım güçleri, $q=m_2/m_1$ kütle oranı, $x_{1,2}$ kenar kararması, $g_{1,2}$ çekim kararması sabitleri ve $A_{1,2}$ yıldız yüzeyleri için albedo parametrelerine bağlıdır. Gerçekte ışık eğrileri, daha bir çok etkiyi de kapsadığından (sistemin toplam ışınım gücünü etkileyecek üçüncü bir ışığın varlığı, yörüngenin dairesel olmaması, bileşenler arası kütle aktarımı, bileşenler etrafında disk, halka ve gaz bulutun varlığı, Güneş lekeleri gibi homojen olmayan yüzey parlaklık dağılımı) bir çift sistemin toplam ışınımı birçok parametrenin fonksiyonu olmaktadır. Buna göre bir çift sistemin belirli bir θ yörünge evresinde, kesirsel ışınım gücü (maksimum parlaklığa normalize edilmiş ışınım gücü) aşağıdaki gibi bir fonksiyonla ifade edilmektedir;

$$l(\theta) = \mathrm{F}(\, r_1, r_2, i, q, L_1, L_2, x_1, x_2, g_1, g_2, L_3, e, \ldots \,) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

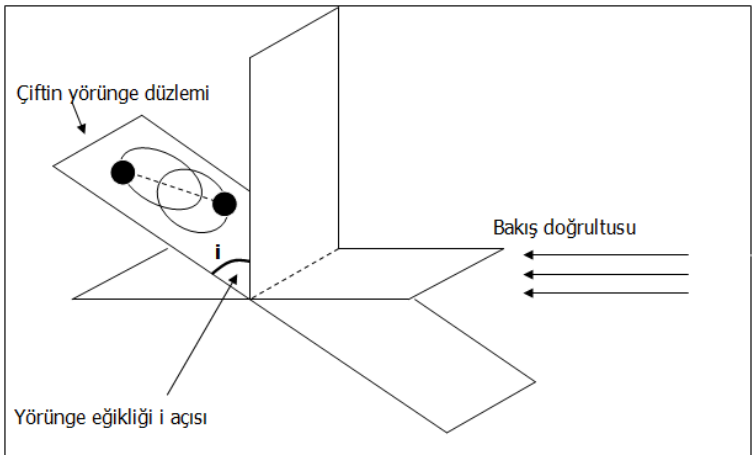
Bu parametrelerin bazıları dalgaboyunun da fonksiyonudur. Bu nedenle gözlenen ışık eğrisinin biçimi, bileşen yıldızların geometrik boyutlarının yanısıra, gözlem yapılan dalgaboyuna da bağımlılık göstermektedir. (1) ifadesindeki $l(\theta)$ ışınım güçleri, bir yörünge dönemini kapsayacak şekilde gözlemlerden elde edilmiş ışık eğrisi noktalarını kuramsal olarak temsil etmektedir. Burada $\theta = \mathrm{MOD}((T - T_0) / P_{yör} ; P_{yör})$ yörünge evresi, T Jülyen

günü biriminde gözlem zamanı, T_0 Jülyen günü biriminde seçilmiş bir başlangıç I. minimum zamanı ve $P_{yör}$ gün biriminde çift sistemin yörünge dönemidir. Buna göre bir çift sistemin ışık eğrisi analizi veya çözümü, uygun matematiksel yaklaşımlar altında (1) ifadesinde verilen $F(r_1, r_2, i, q,\ldots)$ fonksiyonun, çift sistem açısından fiziksel anlamı olan bir çözüm kümesini bulmaktır.

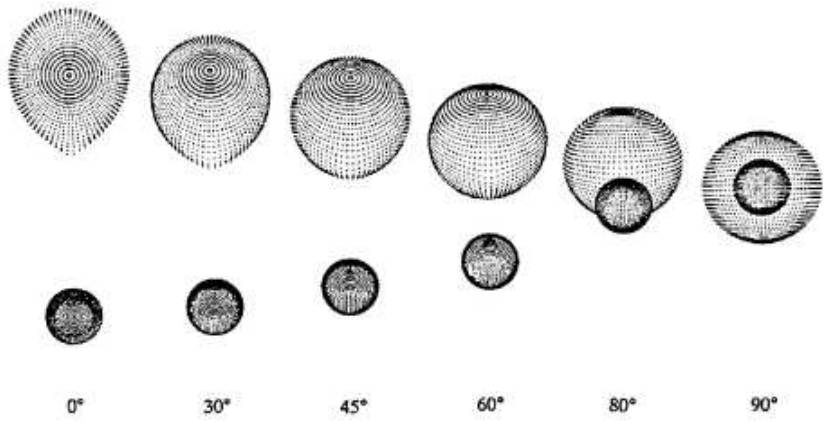
2.1 Işık Eğrisini Etkileyen Parametreler

2.1.1 Çift sistemin yörünge eğikliği

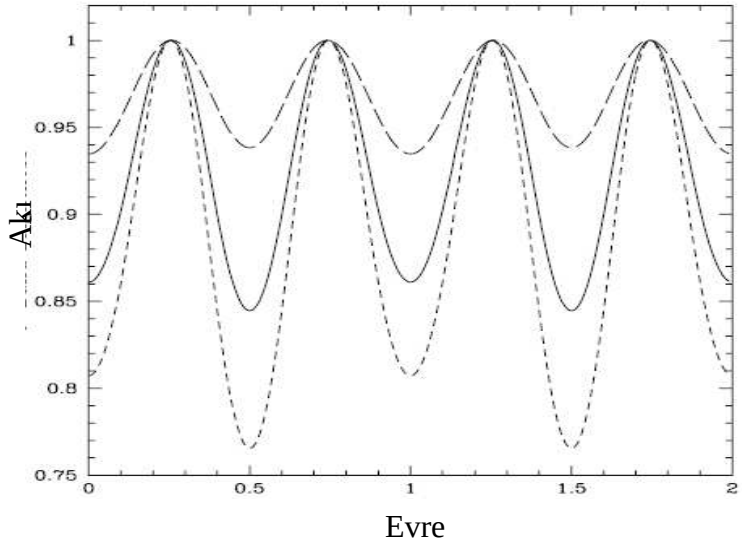
Çift yıldız sisteminin yörünge düzleminin, gözlemciye uygun bir açı altında yönlenmiş olması halinde, bileşenlerin birbirlerini dönemli olarak örtmesi sonucu tutulmalar meydana gelir ve dönemli ışık değişimleri gözlenir. Zamana göre ortaya çıkan bu parlaklık değişimine ise "ışık eğrisi" denir. Tutulma olayının gözlenebilirliği, çift sistemin yörünge düzleminin gözlemciye göre uzaydaki konumuna ve sistemi oluşturan yıldızların yarıçaplarına bağlıdır. Çiftin konum açısı *i*, gözlemcinin bakış doğrultusundaki dik düzlem ile çift sistemin yörünge düzlemi arasındaki açı olarak bilinir ve kısaca çiftin yörünge eğikliği adı verilir.



Şekil 1. Çift sistemin yörünge eğikliği ve yörünge düzlemi.



Şekil 2. Farklı yörünge eğikliklerine göre çift sistemin uzaydaki konumu.



Şekil 3. Üç farklı yörünge eğikliğine göre çift sistemin ışık eğrisi değişimi. Uzun kesikli çizgi i=30°, düz çizgi i=50° ve kısa kesikli çizgi i=70° göstermektedir. Yörünge eğikliği artıkça daha fazla örtülme gerçekleştiğinden minimum derinlikleri artmaktadır.

2.1.2 Yansıma ve çekim kararması

Çekim kararması, yıldızların küresel olmamasından kaynaklanan bir etkidir. Küresellikten sapmış bir yıldızda yüzeyin her noktasında yüzey çekimi sabit olmadığından ışınım şiddeti de sabit olmayacaktır. Daha yüksek yüzey çekimine sahip bölge daha yüksek parlaklığa sahip olacaktır.

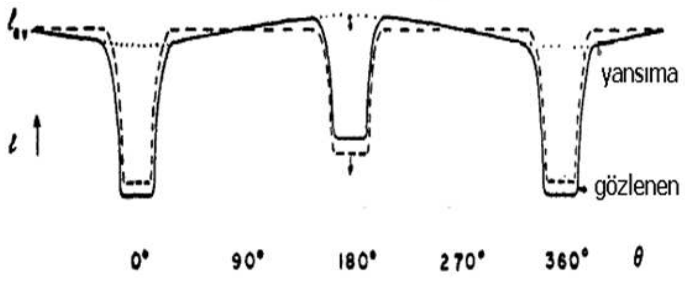
Yüzey sıcaklığı 7000-7400 K'nin altında olan yıldızların dış katmanlarının konvektif olduğu dikkate alınmaktadır. Genellikle ışık eğrisi analizlerinde çekim kararma değerleri için teorik

değerler dikkate alınır. Konvektif atmosfer kabulü altında, sırasıyla birinci ve ikinci bileşn için g_1 ve g_2 çekim kararma değerleri 0.32 alınmaktadır. Ayrıca istenirse konvektif yıldızlar için çekim kararması üssü β'nın değeri,

$$T(\tau,\eta,\phi) = T_{eff}\left(\frac{g(\tau,\eta,\phi)}{g_{eff}}\right)^{\beta} \quad \text{.....(2)}$$

ifadesinden, sıcaklığa bağlı olarak belirlenebilir. Ancak yüzey sıcaklığı 7000-7400 K'den daha yüksek ışımasal atmosferlere ait durumlarda Von Zeipel (1924a,b,c) yasasına ait üstel değerler, β = 0.25 sabit olarak kullanılır, bu durumda g_1 ve g_2 çekim kararma değerleri 1.0 olarak alınır (β ile g arasında, $g = 4\beta$ ilişkisi vardır).

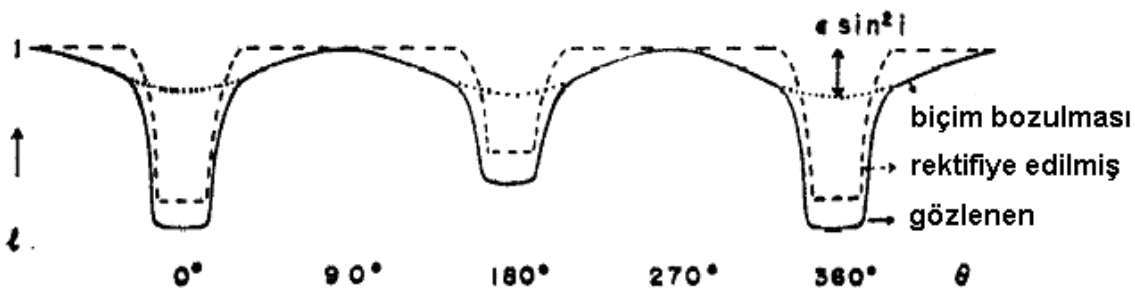
Yansıma etkisi, çift yıldız bileşenlerinin birbirlerine bakan yüzeylerini karşılıklı olarak aydınlatması veya bir başka değişle kendi ışıklarını karşı bileşenin kendine dönük yüzeyi üzerinden yansıtması olayıdır. Bu etki, iki bileşenin birbirine çok yakın olması veya aralarındaki ΔT sıcaklık farkının çok büyük olması halinde önem kazanır ve ışık eğrisi çözümlerinde "*yansıma katsayısı (Albedo)*" adı verilen bir parametre ile dikkate alınır, genelde A_1 ve A_2 ile gösterilir. Yansıma katsayısının değeri, yansıma yapan bileşenin atmosferindeki ışınım taşıma mekanizmasına bağlıdır. Konvektif atmosferler için değeri 0.5, ışımasal atmosferler için değeri 1.0 olarak dikkate alınır.



Şekil 4. Yansımanın ışık eğrisine etkisi.

Karşılıklı çekim etkisi sonucu çift yıldızların biçimleri küresel yapıdan sapar ve armut biçiminde bir şekil alırlar. Armut biçimi şekil bozulmasına uğramış bir yıldızın kendi ekseni etrafında dönmesi durumunda ışığı sabit olmayacaktır. Çünkü yıldızın, izdüşüm düzleminde gördüğümüz kesit alanı, dönme sonucu sürekli olarak değişecektir. Dolayısıyla bu tür yıldızlar

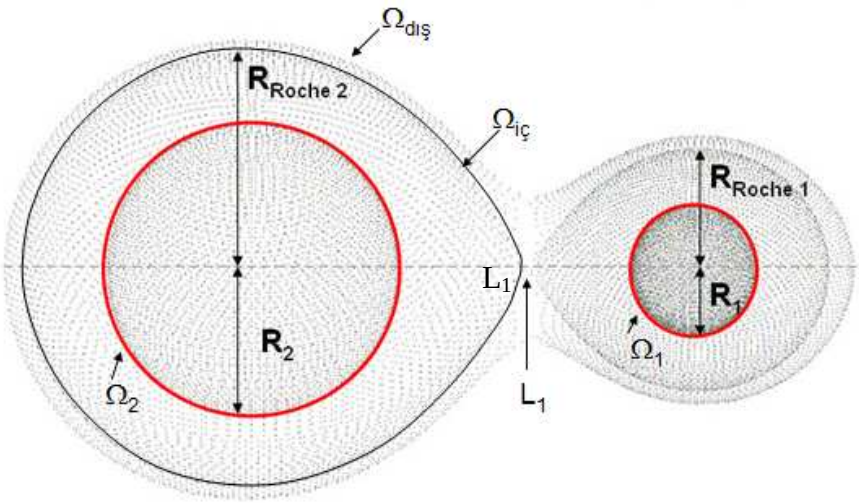
içeren bir sistemin yörünge eğimi, tutulma koşulunu sağlamasa da, ışık eğrisinde dönemli değişimler gözlenecektir.



Şekil 5. Şekil bozulmasının yarattığı ışık değişimi ve bunun ışık eğrisine etkisi.

2.1.3 Roche geometrisi

Çift yıldız sistemlerinde yıldızların biçimi kütle çekim kuvvetine ve yörünge hızıyla oldukça ilişkili olan merkezkaç kuvvetine bağlıdır. Çift yıldızların geometrisi ve dinamiğinde kuvvet yerine daha kolay ifade edilebilen potansiyel kavramı kullanılmaktadır. Buna göre bileşen yıldızların yüzeyleri eşpotansiyelli yüzeyler olarak tanımlanabilmektedir. Roche potansiyeli olarak adlandırılan bu kavram, ilk kez Fransız Matematikçi Edouard Albert Roche (1820 -1883) tarafından Yer'in basıklığını ifade etme için geliştirilmiştir. Sonrasında yakın çift yıldız sistemlerinin genel geometrisi ve dinamiğini de ifade etmek için kullanılmaya başlanmıştır. Dolayısıyla kendisinin ismi ile anılmaktadır. Bir eşpotansiyelli yüzey boyunca basınç ve yoğunluk değerleri sabittir. Birbirine dinamik olarak bağlı iki bileşenden oluşma sistemlerde, bileşenlerin kütle oranına bağlı olarak belli bir eşpotansiyele sahip yüzeyler tek bir noktada birleşerek ∞ biçiminde bir geometri oluştururlar. Bu geometrinin her bir tarafındaki hacimlerin büyüklükleri kütle oranına bağlıdır ve bileşen yıldızların evrim sonucu ulaşabilecekleri en büyük hacimlere karşılık gelmektedir. Bileşenlerin Roche lobları olarak adlandırılan bu sınır hacimlerin kesiştiği noktaya L_1 Lagrange noktası adı verilir. L_1 noktasında net çekim kuvveti, iki bileşenden kaynaklanan çekim kuvvetlerinin dengelenmiş olması nedeniyle sıfırdır.



Şekil 6. Bir çift yıldız sistemi için Roche şişimleri. Burada L_1 Lagrange noktası, R_1 ve R_2 bileşenlerin yarıçapları, Ω_1 ve Ω_2 ise birinci ve ikinci bileşenin yüzey potansiyeli, $\Omega_{iç}$ ve $\Omega_{dış}$ birinci ve ikinci kritik Roche şişimlerin yüzey potansiyelleri.

Bileşenler için yüzey potansiyelleri;

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{R_{1,2}} + \frac{q}{\sqrt{R_{1,2}{}^2 + 1}}, \text{ burada } \quad q = \frac{M_2}{M_1} \quad \text{çift sistemin kütle oranı}$$

ve bileşenlerin kritik Roche potansiyeli ise

$$\Omega = \frac{1}{R_1} + \frac{q}{\sqrt{R_1^2 - 2.R_1 + 1}} - q.R_1 + 0{,}5.(1+q).R_1{}^2$$

ile verilir. Çift sistemin değme oranı f ise

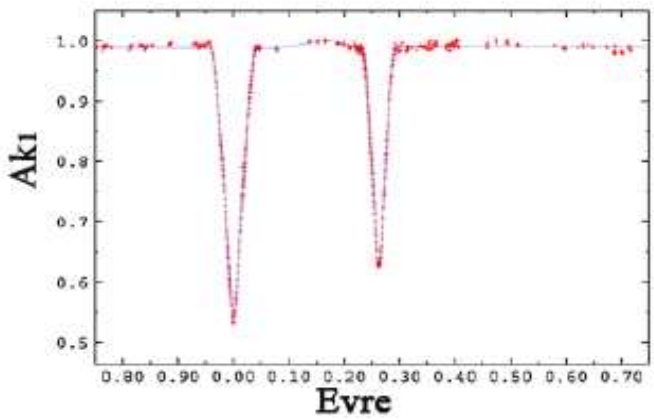
$$f \equiv \frac{\Omega_{iç} - \Omega_{1,2}}{\Omega_{iç} - \Omega_{dis}} \qquad \text{ile verilir.}$$

2.1.4 Dışmerkezlik

Yakın çift yıldızlar çoğunlukla dairesel yörüngelere sahiptir. Ancak ayrık çift yıldızlar arasında yörünge dış merkezliği ihmal edilemeyecek ölçüde büyük olan sistemler bulunmaktadır. Eliptik yörüngeye sahip bir sistemde, bileşenler arası uzaklık ve bileşenlerin yörünge hızları sabit değildir. Yoldaş yıldız, baş yıldız etrafındaki yörüngesinin enberi noktası civarında daha hızlı, enöte noktasında ise daha yavaş hareket edecektir. Böylesi bir sistemin örten çift olması halinde, yörüngesinin uzaydaki konumuna bağlı olarak birinci ve ikinci tutulmalar arası zaman, ikinci ile birinci tutulmalar arasındaki zamana eşit olmayacaktır. Ayrıca, bileşenler arası uzaklık değeri de bir yörünge dönemi boyunca sürekli değişecektir. Bileşenler arası uzaklık, sistemin geometrisini ve dolayısıyla bileşenlerin Roche loblarının boyutlarını belirleyici bir unsurdur. Bu nedenle bir yörünge dönemi boyunca bileşenlerin biçiminde de değişiklikler olmaktadır. Dışmerkezlik;

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. Burada r_2 ve r_1 sırasıyla bileşenler arası en büyük ve en küçük izdüşüm uzaklıklardır. Açıkça görülüyor ki e=0 için r_2=r_1 koşulu gerekmektedir ve bu durumda yörünge dairesel olacaktır. Dışmerkezliğin alabileceği en büyük değer e=1 için yörüngenin biçimi bir paraboldür.



Şekil 7. Dışmerkezliğe sahip bir çift sistemin ışık eğrisi.

2.1.5 Kenar kararması

Bir yıldızın atmosferi içinde izlenebilecek derinlik limiti atmosferin donukluk özelliğine ve bakış doğrultumuz ile yıldız yüzeyi üzerinde seçilmiş bir bölgenin yüzey normali arasındaki açıya bağlıdır. Yıldız diskinin merkezine doğru baktığımızda atmosferin izin verdiği en derin ve dolayısıyla en sıcak katmanları görebiliriz. Merkezden kenara doğru gittikçe, daha soğuk ve dolayısıyla daha düşük parlaklığa sahip dış katmanları görebileceğiz. Bu olgu sonucu bir yıldızın izlenen diskinin kenarı merkezine oranla daha sönük görülecektir. Doğal olarak bu etkiyi yalnızca Güneş'imizin görünen diski üzerinde doğrudan gözleyebilmekteyiz ve buradan elde ettiğimiz özelliklerine dayanarak diğer yıldızlarda modelleyebilmekteyiz.

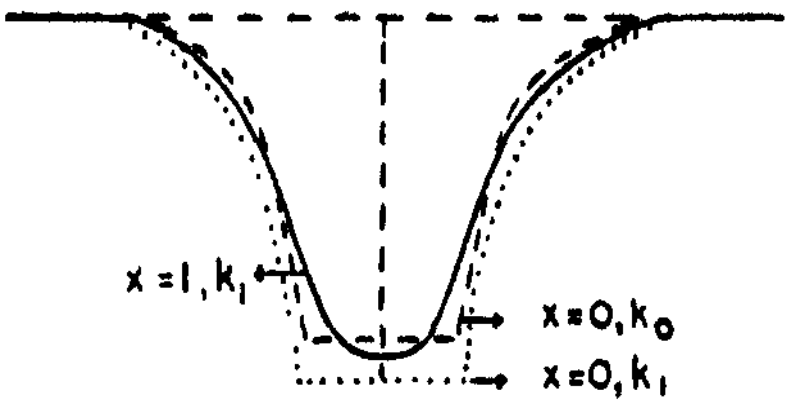
Işık eğrisi analizlerinde genelde üç temel kenar kararma yaklaşımı kullanılabilmektedir. Bunlar doğrusal, logaritmik ve karekök kenar kararma yasaları olarak bilinirler ve sırasıyla:

$$I(\mu) = I(1)[1-u(1-\mu)],$$

$$I(\mu) = I(1)[1-a(1-\mu)-b\mu \ln\mu] \quad \text{ve}$$

$$I(\mu) = I(1)[1-c(1-\mu)-d(1-\mu^{1/2})]$$

bağıntıları ile ifade edilirler. Burada μ yüzeyde seçilmiş bir alan elementinin yüzey normali ile bakış doğrultumuz arasındaki açı, u doğrusal kenar kararma, a, b logaritmik kenar kararma ve c, d ise karekök kenar kararma katsayılarıdır. Bir yıldız için kenar kararma katsayıları, yüzey sıcaklığı ve yüzey çekim ivmesinin değeri ile belirlenir. Kenar kararma katsayılarının ilgili değeri Diaz-Cordovez vd (1995), Claret vd'nin (1995) ve van Hamme (1993) tablolarından alınarak analize sokulur.

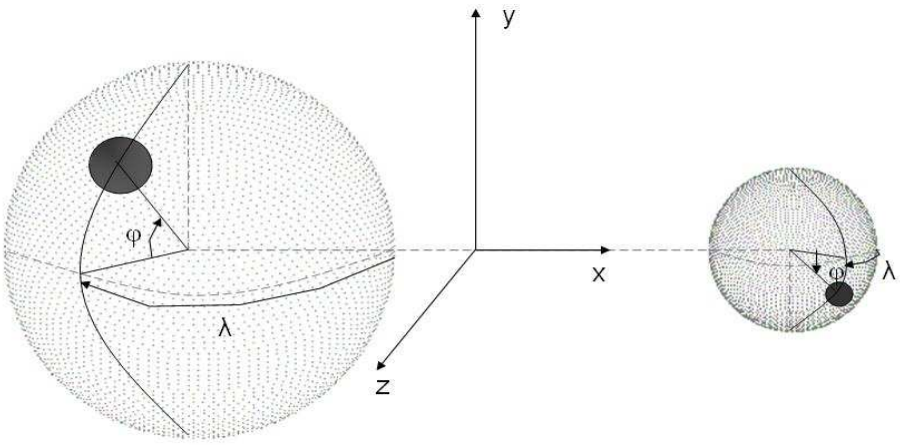


Şekil 8. Kenar kararma ışık eğrisinin minimum yöresinin eğrisel olmasına neden olmaktadır. Burada x kenar kararma parametresini, k ise çift sistemin kesirsel yarıçapları oranını göstermektedir. Aynı kesirsel yarıçapa sahip (k_1) bir çift sistemde kenar kararma etkisine sahip ışık eğrisi düz çizgi, kenar kararma etkisi içermeyen ışık eğrisi noktalı kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

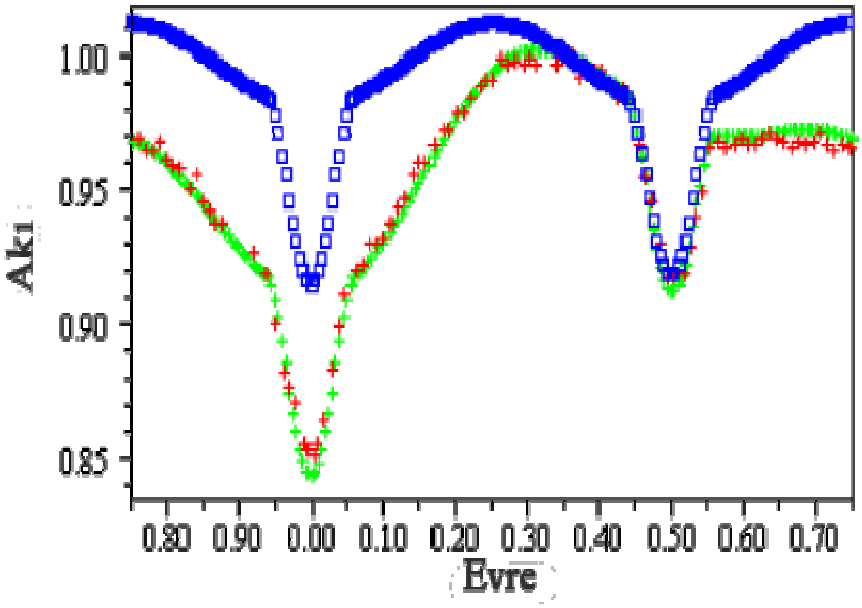
2.1.6 Güneş benzeri leke/lekeler

Güneş benzeri soğuk yıldızların çoğunda manyetik etkinlikten kaynaklanan karanlık leke bölgeleri bulunmaktadır. Bu bölgelerdeki sıcaklık yıldız atmosferine göre daha düşüktür ve genel olarak "*yıldız lekesi*" olarak adlandırılmaktadır. Lekeler yıldız yüzeyinde genelde küçük alanlara sahiptir, fakat bazı sıra dışı yıldızlarda lekelerin yıldız yüzeyinde kapladıkları alanlar toplam yüzey alanının %10 'nu aşabilmektedir. Bu lekeler ışık eğrisinde homojen olmayan yapılar ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Bir leke dört parametre ile tanımlanmıştır; leke enlemi (φ), leke boylamı (λ), lekenin açısal büyüklüğü (θ) ve lekenin sönümleme faktörü (TF). Analizlerde lekelerin daima küresel biçimde oldukları kabul edilir. Leke enlemi, yıldız yüzeyinde yer alan lekenin yıldızın belirli bir referans noktasından (bu genelde enlem veya yıldızın kutbudur) açı derecesi biriminde uzaklığıdır. Leke boylamı, yıldızları birbirine birleştiren doğrudan başlayıp yörünge düzlemi boyunca, saat yönünde, açı biriminde, 0˚-360˚ aralığında ölçülür. Lekenin açısal büyüklüğü, lekenin yıldız yüzeyinde kapladığı alanın ölçüsüdür ve derece birimindedir. Lekenin sönümleme faktörü, $TF=T_s/T$ ile tanımlı olup, leke bölgesinin T_s sıcaklığının lekesiz bölgenin T (yıldız fotosferinin) sıcaklığına oranıdır.



Şekil 9. Çift sistemde leke parametreleri.

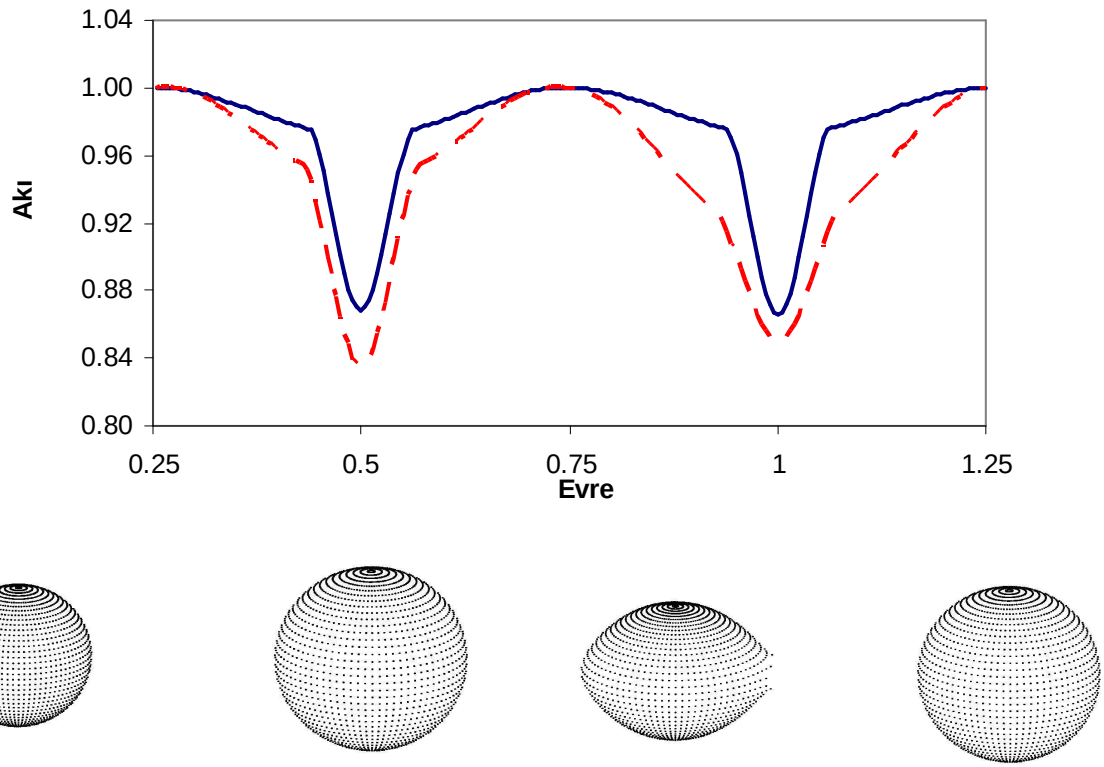


Şekil 10. Lekenin ışık eğrisine etkisi. Üsteki eğri lekesiz ışık eğrisini, altaki eğri ise leke alanı içeren bir ışık eğrisini göstermektedir.

2.1.7 Eş olmayan dönme

Yakın çift yıldızlarda karşılıklı çekimsel kuvvetler, bileşenleri çok kısa zaman içerisinde eş dönmeye zorlamaktadır. Böylece her iki bileşenin kendi eksenleri etrafındaki dönme dönemleri, yörünge dönemine eşit olmaya zorlanır. Bundan dolayı sistemin her iki bileşeni de birbirlerine daima aynı yüzünü gösterirler. Yine de bu ilişki her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin, genç yıldızlar içeren ve henüz yeni oluşmuş bir çift sistemde eş dönmeden sapmalar görülebilir.

Eş olmayan dönme Roche potansiyelini etkileyen bir olgudur. Buna bağlı olarak ilgili bileşenin ve ona ait Roche lobunun biçiminin değişmesine neden olur. Öncelikli etkisi, yörüngeden daha hızlı dönen bir bileşenin basıklığının artması şeklinde olur. İkinci ve asıl önemli etkisi kritik Roche lobu üzerindeki etkisidir. Yörüngeden daha hızlı dönen bir bileşenin kritik lobu olması gerekenden daha küçük bir hacim içerisine büzülür. Böyle bir durumda her iki bileşeni de kritik lobuna değen ancak ayrık olan (birbirine değmeyen) çift sistemler dahi ortaya çıkabilir. Bu etki $F_{1,2}$, eş olmayan dönme parametreleri ile dikkate alınmaktadır. F parametresi bileşenin ekseni etrafındaki dönme döneminin, yörünge dönemine oranı olarak tarif edilebilmektedir.



Şekil 11. Eşolmayan dönmenin ışık eğrisi ve Roche geometrisine etkisi. Işık eğrisindeki kesikli çizgi eşolmayan dönmeyi göstermektedir.

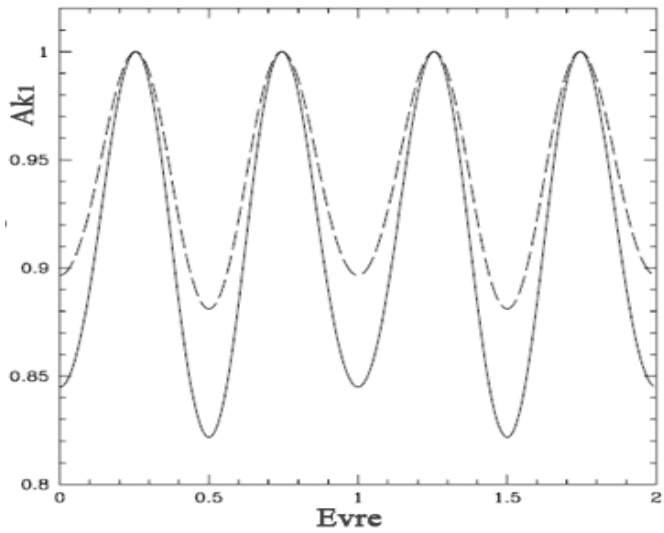
2.1.8 Üçüncü ışık

Bu etki bir çift yıldız sisteminde kendisini ek bir ışık kaynağı olarak gösterir. Bu ek kaynak, çift sistem üyesi olsun veya olmasın çift sistemin tutulma ve tutulma dışındaki toplam ışığına katkıda bulunacak şekilde kendini hissettirir. Bu ışık kaynağının, sistemin üyesi iki bileşen tarafından hiç bir zaman örtülemeyeceği dikkate alınır.

Bu etki, toplam ışığa gelen göreceli katkısı olarak;

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1.0$$

şeklinde ifade edilir. Burada L_1 ve L_2 sırasıyla birinci ve ikinci bileşenin kesirsel ışınım güçleri ve L_3 ise aynı birimde 3. ışık katkısıdır.



Şekil 12. Üçüncü ışığın ışık eğrisine etkisi. Kesikli çizgi üçünü ışık katkılı ışık eğrisi, kesikiz çizgi üçüncü ışık katkısız ışık eğrisi.

2.1.9 Karacisim yasası ve model atmosfer

Yıldızların parlaklıkları, Karacisim Yasası olarak adlandırılan matematiksel ifade ile kabul edilebilir bir yaklaşıklık içerisinde hesaplanabilir. Bu yasa, bir kara cismin birim yüzeyinden, birim zamanda ve belirli bir dalga boyunda saldığı ışınım enerjisi miktarını ifade eder ve ısısal ışınım yayan kaynaklara uygulanabilir. Analizlerde karacisim yasasının dikkate alınması durumunda bileşen yıldızların ışınım katkıları kara cisim yasası kabulleri altında hesaplanmaktadır.

Model Atmosferler, yıldızların gözlenen ışınım tayflarını temsil etmede kullanılan kuramsal araçlardan biridir. Bu modeller büyük bir yaklaşıklıkla sürekli tayf yapısını ve çizgi tayf yapısını temsil edebilmektedir. Karacisim yasasında olduğu gibi yalnızca sıcaklığa bağlı değildir, aynı zamanda yüzey çekimine (dolayısıyla basınca ve yoğunluğa) ve yıldızın kimyasal kompozisyona bağlı olarak sentetik enerji dağılımı üretir. Model atmosfer

hesaplamaları için yüzey çekim ivmesi ve kimyasal kompozisyona bağlı olarak 3000 K ile 35000 K sıcaklık aralığı için tablolar oluşturulmuştur. Işık eğrisi analiz programında bu tablolar kullanılarak bileşenlerin ışınımları hesaplanır.

3. IŞIK EĞRİSİ ANALİZİ

Çift sistemlerin ışık eğrisi çözümü yapılırken, ilk olarak çift sistemi tanımlayan parametrelerin başlangıç değerleri çok iyi tanımlanmalıdır. Birçok parametreyi serbest bırakarak (rastgele denemeler) gözlemlere çok iyi uyum sağlayan çözümler elde edilebilir, ancak bu fit sonuçlarının sistem açısından fiziksel anlamı olmayabilir. Bu nedenle, tüm ışık eğrisi analiz programlarında belli kurallara uyarak az sayıda parametre serbest bırakılmalıdır. Bu nedenle yukarıda verilen bu parametrelerin bir kısmı ışık eğrisi analizinde sabit değer olarak dikkate alınır. Ancak hangi parametrenin sabit alınıp alınmayacağı çift sistemin literatür özetinin çok iyi bilinmesine bağlıdır. Bir örten çift sistemin ışık eğrisi analizi için aşağıda maddeler halinde verilen işlemler uygulanmalıdır.

3.1 Kaynak Özetleri ve Kabuller

Yukarıda bahsedildiği gibi bir çift sistemin ışık eğrisi analizinde birçok parametre deneme yanılma yöntemiyle çok iyi uyum sağlayan bir çözüm elde edilebilir. Ancak bu analiz bize gerçekçi çözüm kümesini vermez. Bu nedenle başlangıç olarak çift sistem için kaynak özeti oluşturulmalıdır. Sistemin literatürde mevcut tüm bulguları çıkartılmalıdır. Bunun için aşağıdaki örneklere dikkatlice bakalım.

Örnek 1. Çift sistem için literatürdeki mevcut bulgular; q=0.291, Tayf türü G2 V ve W UMa türü bir ışık değişimi gösteren bir çift sistem olarak tanımlanmış olsun. Buna göre bu ışık eğrisinde hangi parametreler sabit değer olarak dikkate alınmalıdır?

Cevap 1. Analiz edilecek örten çift sistem için kütle oranı q=0.291 verildiğinden ışık eğerisi analizinde bu değer sabit parametre olarak alınacaktır. Ayrıca çift sistem G2 V tayf türünden olduğundan Popper (1980) veya Gray (1994) gibi sıcaklık kalibrasyon tablolarından bu tayf türüne karşılık gelen sıcaklık (verilen tayf türü için bu değer 5800K) değeri bulunur. Bu tayf türü en baskın olan bileşenden geleceğinden dolayı bu sıcaklık değeri birinci bileşenin

sıcaklık değeri olarak atfedilir, T_1 = 5800 K olacak şekilde sabit parametre olarak dikkate alınır. Kaynak özetlerinde verilen çift sistem W UMa türü ışık değişim karakteristiği (bakınız W UMa türü örten çift sistemler) gösterdiğinden ikinci bileşenin sıcaklık değeri de birinci bileşenin sıcaklık değerine yakın olmalıdır, ancak tam değeri bilinmemektedir. İki bileşen arasında yaklaşık 0-1000 K sıcaklık farkı olabileceğinden, analizde ilk başlangıç değeri olarak T_2=5800 K alınır ve analiz süresince ikinci bileşenin sıcaklığı T_2 iterasyonla hesaplanır. Ancak her iki bileşenin yüzey sıcaklıkları her durumda 7400 K sıcaklığın altında olduğundan, her iki bileşen konvektif atmosferlere sahip olduğu varsayılır. Bu nedenle konvektif atmosfere sahip olduğu yaklaşımı altında her iki bileşen için sırasıyla çekim ve yansıma parametrelerin değerleri; g_1=g_2=0.32 ve A_1=A_2=0.5 olarak varsayılır ve analizlerde sabit parametre olarak dikkate alınır. Kaynak özetlerinde sistem için üçüncü bir ışık katkısı veya leke aktivitesi ile ilgili bir çalışmadan söz edilmediğinden dolayı bu parametreler için birşey söylenmez. Fakat bunun için ışık eğrisinin asimetrik bir yapı gösterip göstermediğine bakılır (bakınız **ışık eğrisi karakteristiği** bölümü). Eğer çift sistemin ışık eğrisi düzgün bir dağılım göstermiyor ve asimetrik bir yapı sergiliyorsa, çift sistemin bileşenlerin birinde veya her ikisinde Güneş benzeri leke alanlarına sahip olduğu kabul edilir ve leke parametreleri bilinmediğinden analizde serbest parametreler olarak dikkate alınır. W UMa türü yıldızların bir başka önemli özelliği de her iki bileşenin yüzey potansiyellerin eşit olmasıdır (Ω_1=Ω_2). Bundan dolayı analizde bu yüzey potansiyelleri herzaman birbirlerine eşit olacak şekilde ve serbest parametreler olarak dikkate alınır. Son olarak, bileşenlerin kenar kararma katsayıları sıcaklık ve ışınım sınıfına göre kenar kararma tablolarından (van Hamme 1993, Claret 2000) elde edilir ve bu değerlerde sabit parametre olarak dikkate alınır. O halde verilen bulgular ışığında analizde T_1, g_1=g_2, A_1=A_2 parametreleri sabit, yörünge eğikliği i, yüzey potansiyelleri Ω_1=Ω_2, bileşenlerin kesirsel ışınım güçleri L_1 ve L_2, ikinci bileşenin yüzey sıcaklığı T_2 parametreleri analizde serbest bırakılır.

Örnek 2. Yarı ayrık bir çift sistem için literatür bulguları; q=1.23, tayf türü A6 IV, radyal hız verileri mevcut ve %5 oranında ışınım katkısı yapan bir üçüncü cisme sahip olarak verilmiştir. Buna göre ışık eğrisi analizinde hangi parametreler sabit parametreler olarak dikkate alınmaldır?

Cevap 2. Sistemin kütle oranı q=1.23 olarak verildiğinden ışık eğrisi analizinde bu değer sabit parametre olarak dikkate alınır. Bir önceki örnekte oldğu gibi sistemin tayf türü birinci bileşene atıf edilerek, sıcaklık kalibrasyon tablolarından verilen tayf türü için (bu örnek için

değer 7800K) hesaplanır ve bu şekilde birinci bileşenin sıcaklığı T_1 sabit parametre olarak dikkate alınır. Birinci bileşenin sıcaklığı 7400K'in üzerinde olduğundan, birinci bileşen için ışımasal atmosfer kabülü yapılır. Buna göre birinci bileşenin çekim ve yansıma katsayıları değerleri sırasıyla g_1 = 1 ve A_1 = 1 olarak varsayılır. Yarı ayrık sistemler β Lyr türü örten çift yıldızlar olarak ta bilinir. Bu sistemlerde bileşenlerden biri veya her ikisi de Roche lobunu neredeyse tamamen doldurmuştur. Bileşenler arasında madde transferi gerçekleşen yarı – ayrık veya değmeye yakın çift yıldız sistemleridir. İkinci bileşen genelde geç tayf türündendir. Bu nedenle ikinci bileşen için konvektif atmosfere sahip olduğu kabul edilir. Konvektif atmosfer kabülü altında ikinci bileşen için çekim ve yansıma katsayıların değerleri sırasıyla g_2=0.32 ve A_2=0.5 olarak varsayılarak analizde sabit parametreler olarak dikkate alınır. Ek olarak sistem %5 oranında üçüncü ışık katkısı içerdiğinden üçüncü ışık katkısı L_3=0.05 olarak varsayılarak analizde sabit parametre olarak dikkate alınır. İkinci bileşen Roche lobunu doldurduğundan ikinci bileşenin yüzey potansiyeli Ω_2 sabit parametre olarak dikkate alınr ve Ω_1 ise serbest parametre olarak dikkate alınır. İkinci bileşenin yüzey potansiyel değeri sistemin kütle oranına bağlı olarak matematiksel yolla hesaplanır (bakınız **Blüm 2.1.3**) ve bu değer girilir. Son olarak sisteme ilişkin radyal hız verileri olduğundan, bu veriler de ışık eğrisi ile birlikte analize sokulur ve bileşenler arasındaki uzaklık a değeri serbest bırakılır. Böylece eşzamanlı yapılacak bir çözümde çift sisteme ilişkin mutlak parametreler (bileşenlerin ayrı ayrı kütleleri, yarıçapları, bileşenler arası uzaklık gibi) elde edilmiş olur. O halde verilen bulgular ışığında analizde T_1, g_1, g_2, A_1, A_2, Ω_2 parametreleri sabit, yörünge eğikliği i, birinci bileşenin yüzey potansiyelleri Ω_1, bileşenlerin kesirsel ışınım güçleri L_1 ve L_2, ikinci bileşenin yüzey sıcaklığı T_2 parametreleri analizde serbest bırakılır.

Örnek 3. Ayrık bir çift sistem için literatür bulguları, q=0.917, tayf türü G0 V ve ışık eğrisinin manyetik etkinlikten kaynaklı asimetrik yapılar gösterdiği olarak verilmektedir. Buna göre ışık eğrisi analizinde hangi parametreler sabit parametreler olarak dikkate alınmaldır?

Cevap 3. Literatürdeki mevcut bulgular ışığında çift sistem için kütle oranı q=0.917 olarak verilmiştir. Bu nedenle ışık eğrisi analizinde q kütle oranı değeri sabit parametre olarak dikkate alınacaktır. Çift sistemin tayf türü G0 V olarak verilmiştir ve bu tayf türüne karşılık gelen sıcaklık değeri birinci bileşene atfedilir. Sıcaklık kalibrasyon tablolarından ilgili tayf türne karşılık gelen sıcaklık değeri (T_1 birinci bileşenin sıcaklığı) bulunur ve analizde sabit değer olarak dikkate alınır. İlgili tayf türü, birinci bileşenin sıcaklığına atfedildiğine göre

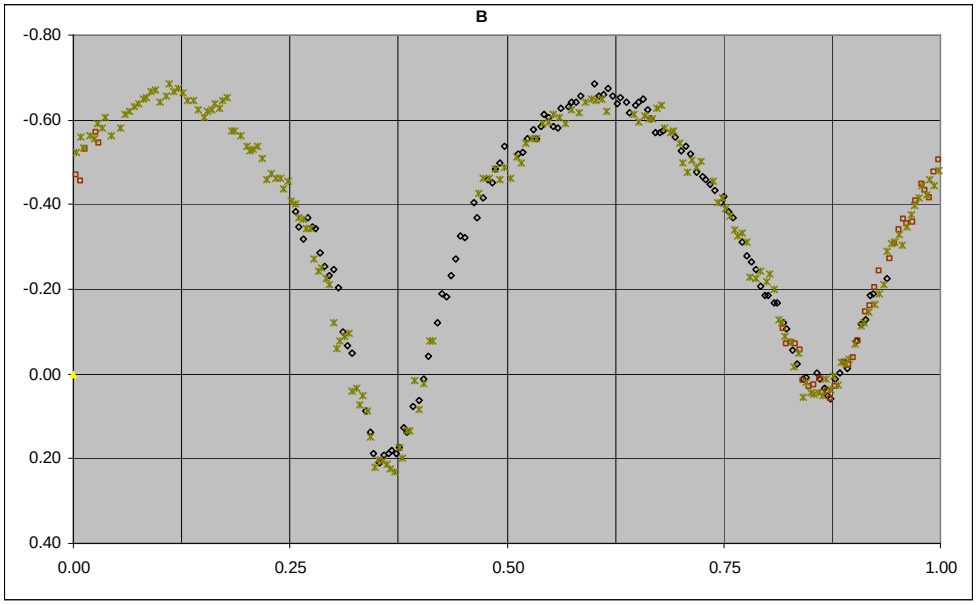
ikinci bileşenin sıcaklığı bu değere eşit veya daha az olmalıdır. Ayrıca ışık eğrisinin minimum derinlikleri veya minimum seviyeleri bize bileşenlerin sıcaklıkları hakkında bir tahmin imkanı verir. Eğer her iki minimum seviyesi eşit düzeyde ise bileşenler yaklaşık aynı sıcaklıklarda olduğunu söyleyebiliriz. Her iki bileşenin sıcaklıkları konvektif atmosfer yaklaşımı için oldukça uygundur. Bu yüzden her iki bileşen için konvektif atmosfer kabülü altında çekim ve yansıma katsayıları sırasıyla g_1=g_2=0.32 ve A_1=A_2=0.5 sabit değerleri girilir. Literatürdeki mevcut bulgular ve gözlemlerden elde edilen ışık eğrisi karakteristiğinden ışık eğrisi asimetrik yapılar göstermektedir. Gözlemsel ışık eğrisini kuramsal olarak modelleyebilmek için bu asimetrik yapılar çift sistemin Güneş benzeri manyetik etkinliğe sahip olduğu varsayımıyla modellenir. Yani bileşenlerin biri veya her ikisinin yüzeyine Güneş benzeri leke alanları yerleştirilir. Buna göre bu leke parametreleri λ leke boylamı, ϕ leke enlemi, θ lekenin açısal çapı ve lekenin sıcaklık faktörü parametreleri analizde serbest olarak bırakılır. Kuramsal eğri gözlemsel eğri ile en iyi uyumu sağlayıncaya kadar bu parametreler sürekli itere edilir. Işık eğrisi karakterisitiği ve mevcut bulgular ışığında ayrık bir çift sistem olarak adlandırılan bu sistem için bileşenlerin yüzey potansiyelleri serbest parametreler olarak dikkate alınır. O halde verilen bulgular ışığında analizde T_1, g_1, g_2, A_1, A_2, parametreleri sabit, yörünge eğikliği i, birinci ve ikinci bileşenin yüzey potansiyelleri Ω_1 ve Ω_2, bileşenlerin kesirsel ışınım güçleri L_1 ve L_2, ikinci bileşenin yüzey sıcaklığı T_2 ve leke parametreleri λ, ϕ, θ ve TF analizde serbest parametreler olarak dikkate alınır.

3.2 Yeni Işık Elemanlarının Hesaplanması

Işık eğrileri analiz edilmeden önce, ışık eğrilerinde asimetrik özellik gösterip göstermediği ve dönem değişiminden veya sistematik hatadan kaynaklı bir etkinin olup olmadığı denetlenmesi gerekmektedir. Işık eğrisinin doğru olarak modellenebilmesi, her bir evredeki ışık değişiminin doğru olarak hesaplanabilmesi için gözlemsel ışık eğrisinin evre hesabının doğru olarak hesaplanması gerekir. Evre hesabı için T_0 Jülyen günü biriminde seçilmiş bir başlangıç I. minimum zamanı ve $P_{yör}$ gün biriminde çift sistemin yörünge döneminin bilinmesi gerekir. Buna göre, Jülyen günü birimindeki T gözlem zamanları,

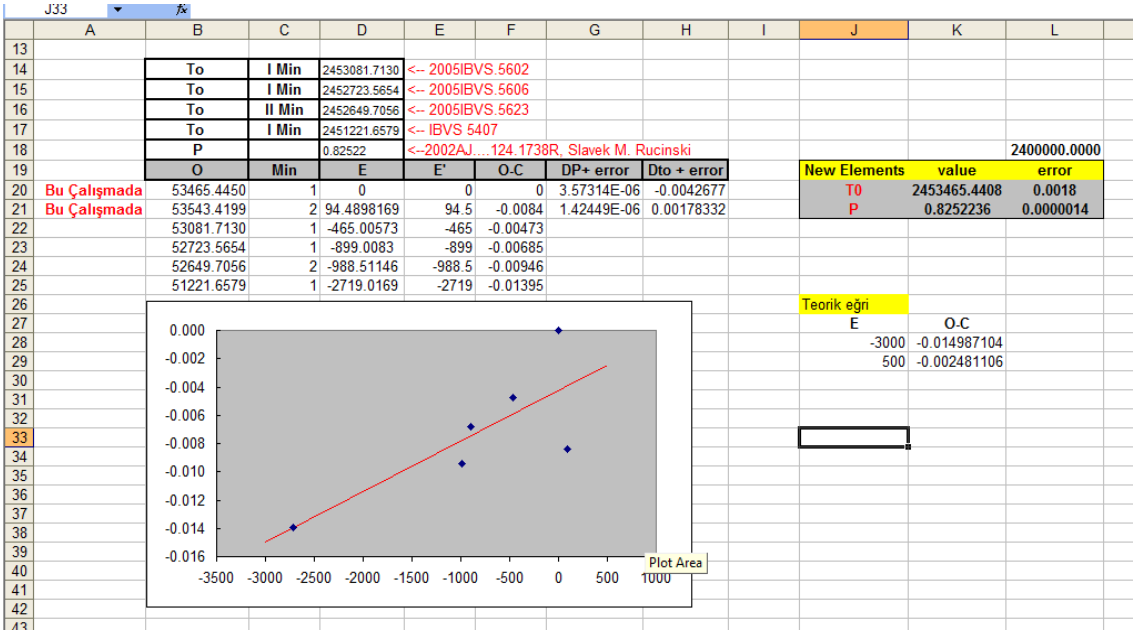
$$Evre = (T - To) / P - tamkısım((T - To) / P)$$

ifadesi ile bulunur. Yani tam bir çevrim 0 ile 1 aralığında olan ondalıklı değerlerden oluşacak şekilde evrelendirilir. Buradaki 0 değeri çift sistemin I. minimum anını (sıcak bileşenin örtüldüğü an) ve 0.5 (soğuk bileşenin örtüldüğü an) değeri ise çift sistemin II. minimum anını gösterecektir. Sistematik hata veya dönem değişiminden kaynaklanan etkilerden dolayı gözlemsel ışık eğrilerinin I. ve II. minimum anları olması gereken 0 ve 0.5 evrelerinde görülmeyebilir (Şekil 13). Bunun için çift sisteminin yeni ışık elemanlarının (T_0 ve P) yeninden hesaplanması gerekir.



Şekil 13. SW Lac'ın örten çift sisteminde görülen evre kayması.

Yeni ışık elemanlarının hesaplanabilmesi için ilgili çift sistemin yakın tarihli (genellikle son 3-5 yıl) minimum zamanları literatürden toplanır ve bu değerler için doğrusal en küçük kareler fiti uygulanır. Şekil 14'de ışık elemanlarının hesaplanmasına ilişkin bir örnek verilmiştir.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13												
14		To	I Min	2453081.7130	<-- 2005IBVS.5602							
15		To	I Min	2452723.5654	<-- 2005IBVS.5606							
16		To	II Min	2452649.7056	<-- 2005IBVS.5623							
17		To	I Min	2451221.6579	<-- IBVS 5407							
18		P		0.82522	<--2002AJ....124.1738R, Slavek M. Rucinski							2400000.0000
19		O	Min	E	E'	O-C	DP+ error	Dto + error		New Elements	value	error
20	Bu Çalışmada	53465.4450	1	0	0	0	3.57314E-06	-0.0042677		T0	2453465.4408	0.0018
21	Bu Çalışmada	53543.4199	2	94.4898169	94.5	-0.0084	1.42449E-06	0.00178332		P	0.8252236	0.0000014
22		53081.7130	1	-465.00573	-465	-0.00473						
23		52723.5654	1	-899.0083	-899	-0.00685						
24		52649.7056	2	-988.51146	-988.5	-0.00946						
25		51221.6579	1	-2719.0169	-2719	-0.01395						
26										Teorik eğri		
27										E	O-C	
28										-3000	-0.014987104	
29										500	-0.002481106	

Şekil 14. Yeni ışık elemanların hesabına ilişkin örnek.

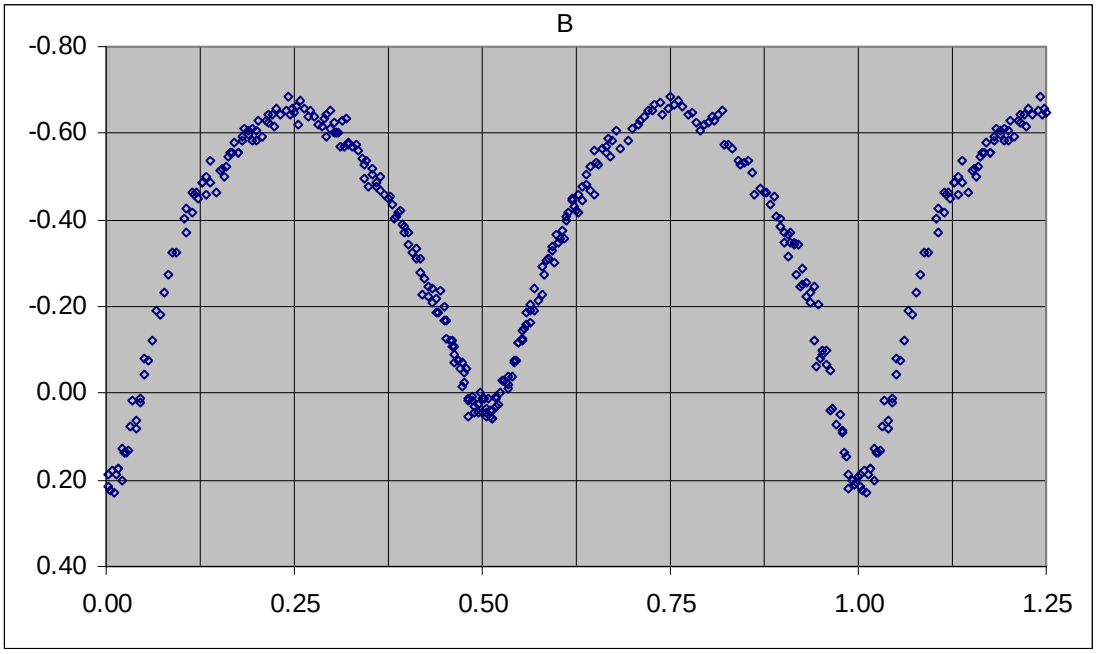
Yeni ışık elemanları şu şekilde hesaplanır;

1. *Adım:* Yıldıza ait yakın tarihli (son 3-5 yıl içerisindeki) minimum zamanları literatürden toplanır (Şekil 14'de B14-B17, C14-C17 ve D14-D17 kolonları)
2. *Adım:* Yıldız için yakın tarihli belirlenmiş yörünge dönemi bulunur (Şekil 14'de D18 hücresi)
3. *Adım:* Ayrıca kendi gözlemlerimizden elde ettiğimiz minimum zamanları da eklenir (B20 ve B21 hücreleri gibi).
4. *Adım:* Yeni ışık elemanları için başlangıç bir referans minimum zamanı seçilir (B20 hücresi).
5. *Adım:* Toplanan minimum zamanları referans alınan minimum zamanı ve döneme göre *E* çevrim değerleri hesaplanır ($E = (T - T_0) / P$, buradaki T_0 ve *P* değerleri sabit referans alınan değerlerdir, D20-D25 hücre aralığı).
6. *Adım:* Çevrim değerleri minimum türlerine göre yuvarlama işlemi yapılır (örneğin E20 hücre aralığı için *=IF(C20=1;ROUND(D20;0);IF((SIGN(D20)*-1) >0;TRUNC(D20)-0.5;TRUNC(D20)+0.5))* yazılır ve diğer hücreler için de benzer işlem uygulanır).
7. *Adım:* Gözlenen ile teorik olarak bulunun minimum zamanların farkı alınır (örneğin B20 hücre değeri için *O-C* farkı *B20-(To+E'*P)* şeklindedir, buradaki *To* referans

aldığımız başlangıç minimum zamanı B20, *E*' değeri ise hesaplanan çevrim değeri E20 hücresi ve *P* referans alınan dönem D18 hücresidir).

8. *Adım:* Bu adımda *E*' ve *O-C* değerleri için en küçük kareler fiti yapılır. Şekil 14'deki verilere göre G20-G21 ve H20-H21 hücre aralıklarına şu ifade yazılır *=LINEST(F20:F25;E20:E25;TRUE;TRUE).* Ardından G20 hücresi seçili konumda iken klavyenin F2 fonksiyon tuşuna basılır. Sonrasında Ctrl+Shift+Enter tuşlarına birlikte basılır. Böylece en küçük kareler yöntemine göre yeni ışık elemanları için düzeltme değerleri bulunmuş olur.
9. *Adım:* En son olarak yeni ışık elemanları için bulunan düzeltme değerleri başlangıçta referans olarak alınan *To* ve *P* değerlerine eklenir. Şekil 14'ye göre K20 hücre içerisine *=H20+B20* yazılır, benzer şekilde yeni yörünge dönemi için de K21 hücre içeriğine = *G20+D18* yazılır.
10. Hesaplanan ışık elemanları ile *T* Jülyen günü birimindeki gözlem zamanları kullanılarak yeni evre değerleri hesaplanır.

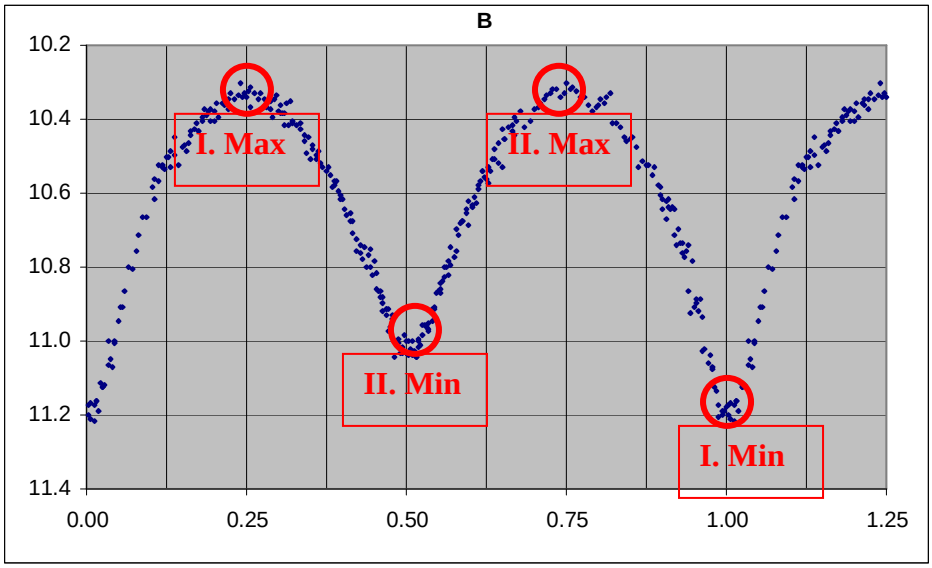
Bu adımlar sonucunda yukarıda verilen ışık eğrisi yeniden çizdirildiğinde şu şekilde oluşur;



Şekil 15. SW Lac'ın yeni ışık elemanlarına göre ışık eğrisi.

3.3 Işık Eğrisi Karakteristiği ve Normalizayson

Işık eğrisi karakteristiği ışık eğrisinin dört özel durumu ile ilgili bilgi verir. Bunlar ışık eğrisinin I. min (0 evresi), II. min (0.5 evresi), I. max (0.25 evresi) ve II. max (0.75 evresi) durumlarındaki parlaklık ve parlaklık farkları hakkındaki bilgiyi verir. Bir ışık eğrisinin karakteristğini bulmak için bu özel dört durumdaki evrelere karşılık gelen yerlerin $\Delta\Phi$ (Örneğin 0.25 evresindeki ortalama parlaklık değerini hesaplamak için *0.24-0.26* evre aralığındaki parlaklıkların ortalaması alınır, yani $\Delta\Phi=0.02$ için ortalama parlaklık) kadar evre aralığında parlaklıkların ortalamaları hesaplanır. Şekil 16'te bu özel dört durum gösterilmiştir.



Şekil 16. Işık eğrisinin dört özel konumu: I. min, I. max, II. min, II. max.

Bu adımdan sonra; birinci ve ikinci maksimum parlaklık farkları, birinci ve ikinci minimum parlaklık farkları ve son olarak birinci ile ikinci minimum derinlikleri. Şekil 16'te verilen yıldız için bu değerlerin listesi aşağıdaki Tablo 1'de verildi.

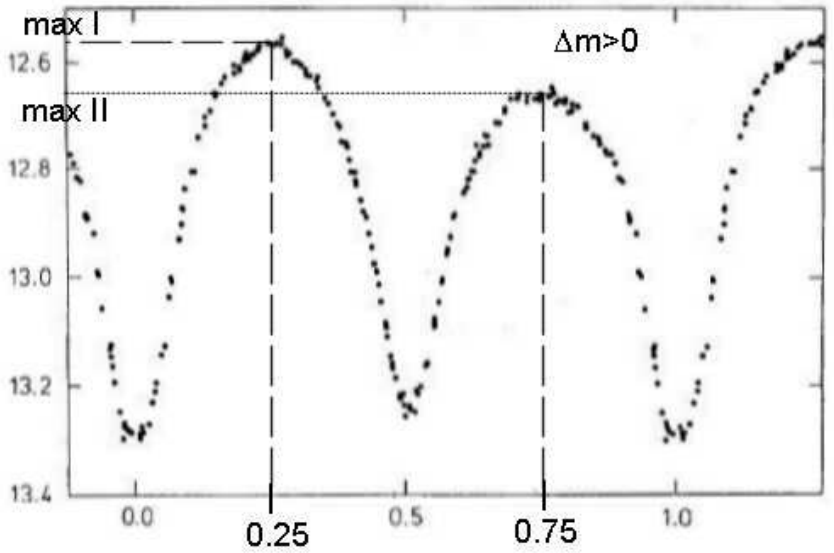
Tablo 1. Örnek örten çift yıldızın ışık eğrisi karakteristikleri

	B
Max I (0.25 evre)	10.333
Max II (0.75 evre)	10.321
Min I (0 evre)	11.186
Min II (0.5 evre)	11.018
Δ_max (max I – max II farkı)	0.012
Δ_min (min I – min II farkı)	0.168
D_minI (max I – min I farkı)	-0.853
D_minII (max II – min II farkı)	-0.697

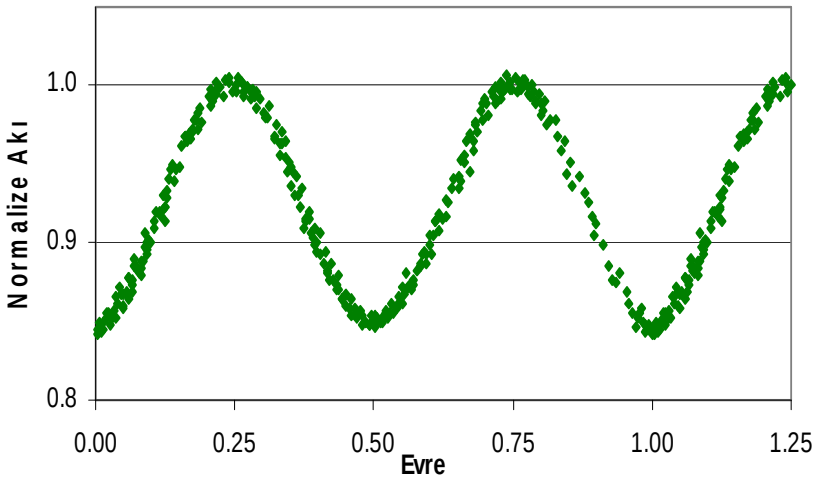
Böylece gözlemsel ışık eğrisinin temel karekteristik özellikleri belirlenmiş oldu. Bu özelliklerden en önemlisi iki maksimum ışık seviyesi arasında (0.25 evresi ve 0.75 evresi için) önemli bir ışık seviye farkının olup olmadığıdır. Eğer iki seviye farkı varsa ışık eğrisi analizlerinde bu etki dikkate alınması gerekecektir. Bu farklılık O'Connell etkisi olarak isimlendirilir ve bu etki leke etkinliğinden veya bileşenlerin çevreleyen maddeden kaynaklanmaktadır (Şekil 17). Işık eğrisi karakteristiği elde edildikten sonra yukarıdaki Tablo 1 değerlerine göre ışık eğrisi normalize edilir. Normalize, ışık eğrisinin belirli bir değere göre oranlanmasıdır ve bu genellikle ışık eğrisinin en parlak olduğu anındaki (max I veya max II seviyesi) değere göre yapılır. Bu nedenle ışık eğrisi karakteristiği tablosundan yararlanılarak ışık eğrisinin en parlak olduğu evredeki parlaklık değeri bulunur. Yukarıdaki örnek olarak verilen tabloda ışık seviyesi max II'de daha parlaktır. O halde ışık eğrisi bu değere göre normalize edilmelidir. Normalize herbir parlaklık değerinden bu maksimum ışık değerinden çıkartılmasıdır. Yani, $\Delta m_1 = m_1 - maxII$, $\Delta m_2 = m2 - maxII$, $\Delta m_3 = m3 - maxII, \ldots$, $\Delta m_n = m_n - maxII$, buradaki m değerleri ilgili gözlem filtresindeki gözlemsel parlaklık değerleridir. Işık eğrisi analizi için bu normalize değerler ışınım şiddeti birimine (1'e normalize edilmiş akı) çevrilebilmesi içinde de;

$$l(evre) = 10^{-0.4.\Delta m}$$

ifadesiyle normalize akı değerleri elde edilir. Böylece ışık eğrisi kesirsel ışınım gücü birimine dönüştürülmüş oldu ($L_1 + L_2 = 1.0$). Aşağıdaki Şekil 18'de yukarıdaki yıldızın normalize ışık eğrisi grafiği verildi.



Şekil 17. Işık eğrisinde O'Connell etkisinden kaynaklanan I. ve II. maksimumlar arasındaki fark.



Şekil 18. Normalize ışık eğrisi.

3.4 Işık Eğrisi Analiz Programları

Örten çift sistemlerinin ışık eğrilerine ilişkin analiz modelleri ilk olarak 1900'lü yılların başında, en basit durum, dairesel yörüngeli ve küresel yapıya sahip bileşenler varsayımı ile Russell (1912a,b) tarafından ortaya konmuştur. Merrill (1950), Russell'ın çalışmasını tutulmaların farklı türleri için, tutulma derinliklerine bağlı ayrı tablolar kullanarak çözüme ulaşacak şekilde geliştirmiştir. Yöntem Russell ve Merrill (1952) tarafından daha da geliştirilerek, bileşenlerin üç eksenli elipsoid yapısı dikkate alınmış, böylece yıldızların

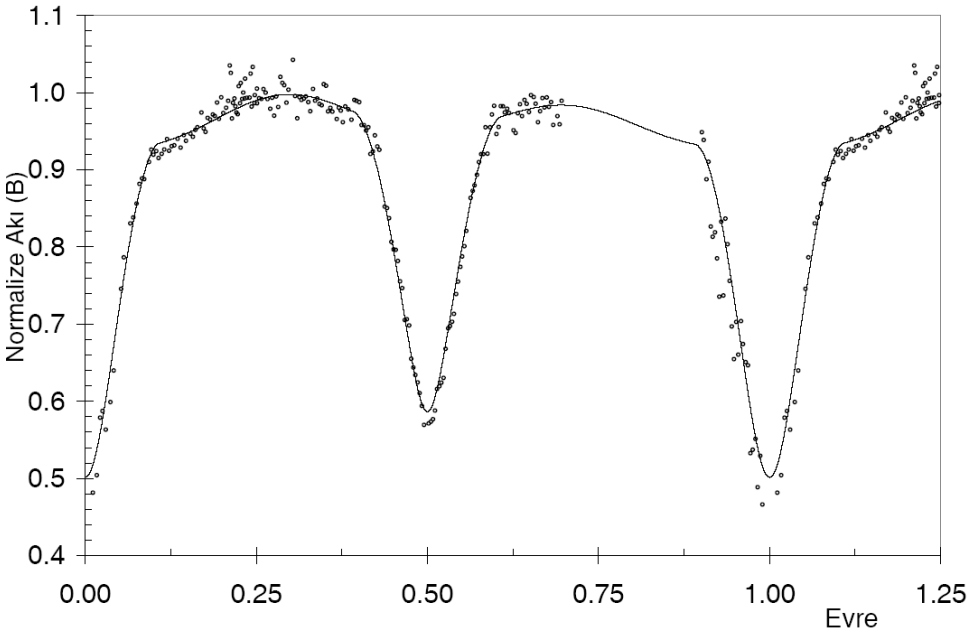
yakınlık etkileri ile geometrik örtme örtülme olayları modellenmiştir. Işık eğrisi analiz yöntemlerinde kayda değer gelişmeler, 1970'li yıllarda gerçekçi fiziksel modellerin ortaya konması ve bilgisayarların astronomide yaygın olarak kullanılmaya başlaması ile gerçekleşmiştir. Ortaya konan modeller genellikle geliştiren araştırmacıların isimleriyle anılmaktadır. Genel olarak teorik bir model oluşturma ve gözlemlerle olan uyumunu test etmeye dayalı bu çalışmalarda en çok şu araştırmacıların isimleriyle karşılaşmaktayız: Russell ve Merrill (1952), Wood (1971), Etzel (1981), Lucy (1968, 1973), Rucinski (1973 a,b), Wilson & Devinney (1971, 1973), Binnendijk (1977) ve Hill (1979).

Işık eğrisi analiz programları, örten çift yıldızların temel fiziksel parametrelerinin tahmin edilmesinde tanıdığı olanakların yanı sıra, sentetik ışık ve radyal hız eğrisi üretebilme, çift sistemin 2 boyutlu düzlem üzerindeki izdüşüm geometrisini çizme ve gözlemsel verilere en iyi fiti uygulayabilme yeteneklerine sahiptir. Bu analiz programları yakın çift yıldız sistemlerinde dikkate alınması gereken tüm ışımasal ve geometrik etkileri gözönünde bulundurmaktadır.

Buna göre bu analiz programlarından biri kullanılarak yapılan bir çift sistemin ışık eğrisi analizi, şu adımlardan oluşmaktadır;

1. *örten çift sistmen için yeni ışık elemanların saptanması*
2. *yeni ışık elemanlarına göre yeniden evrelendirilmesi*
3. *yakın çift sistem için literatür özetinin yapılması*
4. *gözlemsel verinin uygun formatta dönüştürülmesi (normalizasyon)*
5. *Sabit ve serbest parametrelerin saptanması*
6. *serbest bırakılan parametreler en iyi modele ulaşıncaya kadar ardışık yaklaştırmaların yapılması.*
7. *Teorik yaklaştırmalarla gözlemlere en iyi uyumun sağlandığı modelin, çift sistem için çözüm parametresi olarak kabul edilmesi.*

Buöylece analiz sonu sisteme ait fiziksel parametreler elde edilmiş olur. Şekil 19 ve Tablo 2'de UV Leo'nun ışık eğrisine ilişkin teorik ışık eğrisi ve bulunan sonuçlar örnek olarak verildi.



Şekil 19. UV Leo'nun gözlemsel ve teorik ışık eğrisi.

Tablo 2: UV Leo'nın Fotometrik Analiz Sonuçları

Parametre	**B Rengi**	**V Rengi**
T_1 (K)	5915	
T_2 (K)	5654 ± 85	
q (m_2/m_1)	0.917	
i (°)	84.077 ± 0.560	
A	0.5	
g	0.32	
Ω_1	4.52162 ± 0.09958	
Ω_2	3.79061 ± 0.02549	
$L_1/(L_1+L_2)$	0.431 ± 0.017	0.385 ± 0.017
$L_2/(L_1+L_2)$	0.569 ± 0.019	0.615 ± 0.017
x_1	0.831	0.750
x_2	0.835	0.757
$F_{1,2}$	1.0	1.0
1. Leke		
λ_1 (°)	110.50 ± 1.47	
φ_1 (°)	38.03 ± 0.48	
θ_1 (°)	45.48 ± 0.91	
TF_1 (T_{eff}/T_{leke})	0.88 ± 0.02	
2. Leke		
λ_2 (°)	258.64 ± 1.25	
φ_2 (°)	48.96± 0.81	
θ_2 (°)	37.72 ± 0.45	
TF_2 (T_{eff}/T_{leke})	0.86 ± 0.01	

KAYNAKLAR

Binnendijk, L., 1977, VA, 21, 359

Claret, A., Diaz-Cordoves, J., Gimenez, A., 1995, A&AS, 114, 247C

Claret, A., 2000, A&A, 363, 1081.

Diaz-Cordoves, J., Claret, A., Gimenez, A., 1995, A&As, 110, 329

Etzel, P. B., 1981, , (ed E. B.Carling and Z. Kopal) p. 111

Hill, G., 1979, PDAO, 15, 297

Gray R.O. & Corbally C.J., 1994, AJ, 107, 742

Lucy, L.B., 1968, ApJ, 153, 877

Lucy, L.B., 1973, Ap&SS, 22, 381

Merrill, J. E., 1950, PA, 58, 475

O'Connel, D.J.K. 1951, Pub. Riverwier College Obs., 2, 85-100

Popper, D. M., 1980, ARA&A, 18, 115

Rucinski, S.M., 1973a, AcA, 23, 79

Rucinski, S.M., 1973b, AcA, 23, 301

Russell, H.N., Merrill, J.E., 1952, PC, no:26

Van Hamme, W., 1993, AJ, 106, 2096

Von Zeipel, H., 1924a, MNRAS, 84, 665

Von Zeipel, H., 1924b, MNRAS, 84, 684

Von Zeipel, H., 1924c., MNRAS, 84, 702

Wilson, R.E., Devinney, E.J., 1971, ApJ, 166, 605

Wood, D.B., 1971, AJ, 76, 701.