Diferensiyel Geometri I

8. Bölüm

Bir Dönüşümün Diferensiyeli

Tanım (Türev Dönüşümü):

$$F: \quad E^n \quad \longrightarrow \quad E^m$$

bir dönüşüm olsun.

$$\begin{array}{rccl} F_* \mid_p: & T_{E^n}(p) & \longrightarrow & T_{E^m}(p) \\ & \overrightarrow{v_p} & \longrightarrow & F_* \mid_p (\overrightarrow{v_p}) \; = \frac{dF(p+tv)}{dt} \mid_{t=0} \end{array}$$

dönüşümüne F nin $P \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümü denir.

Örnek:

$$
\begin{array}{llcll}
F: & E^2 & \rightarrow & E^2 & \\
 & (x_1, x_2) & \rightarrow & F(x_1, x_2) = & (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)
\end{array}
$$

dönüşümü veriliyor. $\overrightarrow{v} = (0,1)$ ve $P(1,0)$ için $F_* \mid_p (\overrightarrow{v_p})$ değerini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
F_* \quad | \quad {}_P(\overrightarrow{v_P}) &= \frac{dF(P+tv)}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{dF(1-t^2, 2t)}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= (0,2) \Big|_{F(P)}
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem: E^m nin bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve

$$F: \quad E^n \quad \longrightarrow \quad E^m$$

bir dönüşüm olsun. E^n in $P \in E^n$ noktasındaki bir tanjant vektörü $\overrightarrow{v_p}$ ise $F(P) \in E^m$ noktasındaki $F_*(\overrightarrow{v_p})$ tanjant vektörü için

$$F_*(\overrightarrow{v_p}) = \sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{v_p}[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_{F(P)}$$

dir.

Örnek: E^2 nin bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2\}$ ve E^3 ün bir koordinat sistemi $\{y_1, y_2, y_3\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccccc} F: & E^2 & \rightarrow & & E^3 \\ & (x_1, x_2) & \rightarrow & F(x_1, x_2) = & (x_1, x_2, x_1 x_2) \end{array}$$

ve $\overrightarrow{v_p} = (1, 0) \mid_P$ için $F_*(\overrightarrow{v_p})$ yi hesaplayalım.
$f_1 = x_1, f_2 = x_2$ ve $f_3 = x_1 x_2$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_p}[f_1] &= \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \mid_P \\ &= 1 \\ \overrightarrow{v_p}[f_2] &= 0 \\ \overrightarrow{v_p}[f_3] &= x_2 \mid_P \end{aligned}$$

olur.

Böylece

$$
\begin{aligned}
F_*(\overrightarrow{v_p}) &= \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{v_p}[f_i] \frac{\partial}{\partial y_i} \mid_{F(P)} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1} \mid_{F(P)} + x_2 \mid_P \frac{\partial}{\partial y_3} \mid_{F(P)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem:

$$F: \quad E^n \quad \longrightarrow \quad E^m$$

dönüşümünün $\forall P \in E^n$ noktasındaki

$$F_* \,|_p: \quad T_{E^n}(p) \quad \longrightarrow \quad T_{E^m}(p)$$

türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür.