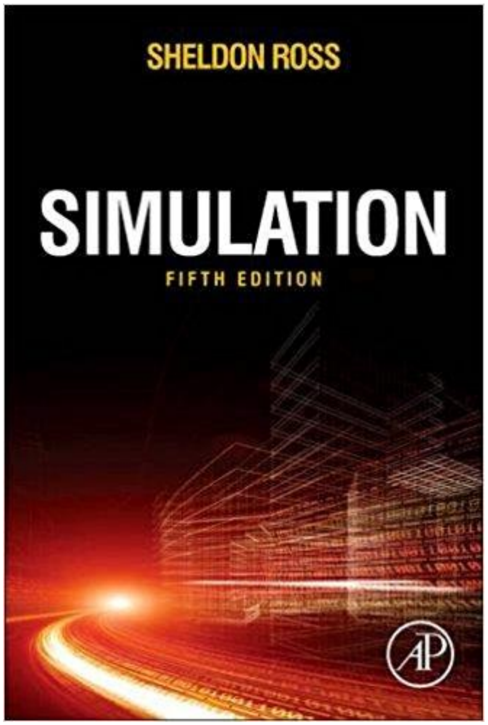
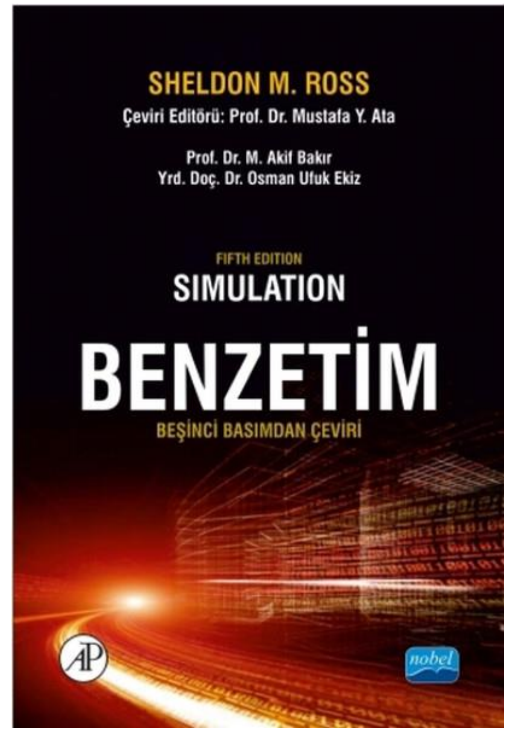
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 2
Olasılık Öğeleri

2.1 Örneklem Uzayı ve Olaylar

- Sonucu önceden bilinmeyen bir deney göz önünde bulundurulsun. Deneyin örneklem uzayı olarak bilinen tüm olası sonuçlar kümesi *S olsun. Örneğin, deney 1'den 7'ye* kadar numaralanmış yedi atın katıldığı bir koşudan oluşuyorsa, o zaman
- *S = {(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)'nin tüm sıralamaları)*

2.2 Olasılık Aksiyomları

Aksiyom 1 $0 \leqslant O(A) \leqslant 1$

Aksiyom 2 $O(S) = 1$

Aksiyom 3 *Karşılıklı bir birini dışlayan herhangi bir A_1, A_2,... olaylar ardışımı için*

$$O\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} O(A_i), \qquad n = 1,2,...,$$

2.3 Koşullu Olasılık ve Bağımsızlık

- **Örnek 2a** Bir sigorta şirketi müşterilerini kazaya yatkın olup olmadıklarına göre sınıflamaktadır. Ellerindeki veriler kazaya yatkın kişilerin bir yıl içinde kaza bildiriminde bulunma olasılığının 0.25, kazaya yatkın olmayan kişiler içinse bu olasılığın 0.10'a düştüğünü göstermektedir. Eğer yeni bir müşteri 0.4 olasılıkla kazaya yatkın bir kişi ise, bu kişinin bir yıl içinde kaza bildiriminde bulunması olasılığı nedir?

Örnek 2b Varsayalım ki, k tür kupon var ve toplanan her yeni kupon kendinden bir öncekinden bağımsız olarak $o(j)$ $\sum_{j=1}^{k} o(j) = 1$, olasılıkla j türündedir. Toplanan n'inci kupon türünün önceden toplanmış $n - 1$ taneden farklı olma olasılığını bulun.

2.4 Rasgele Değişkenler

Örnek 2a X'in 1, 2 ya da 3 değerlerinden birini aldığını varsayalım. Eğer,

$$o(1) = \frac{1}{4}, \qquad o(2) = \frac{1}{3}$$

ise, $o(1) + o(2) + o(3) = 1$ olduğu için, $o(3) = \frac{5}{12}$ sonucu elde edilir. □

2.5 Beklenen Değer

Örnek 2b Eğer bir A olayı için I rasgele bir gösterge değişkeni ise, yani eğer

$$I = \begin{cases} 1 & A \text{ gerçekleşirse} \\ 0 & A \text{ gerçekleşmezse} \end{cases}$$

ise, o zaman

$$B[I] = 1O(A) + 0O(A^T) = O(A)$$

olur. Böylece, A olayı için tanımlı rasgele bir gösterge değişkeninin beklenen değeri sadece A'nın gerçekleşme olasılığına eşittir. □

Örnek 2c Eğer X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk işlevi,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

şeklinde verilmişse, o zaman

$$B[X] = \int_0^1 3x^2 dx = \frac{1}{3}$$

olur.

2.6 Değişken

Tanım *X ortalaması μ olan rasgele bir değişken ise, o zaman $D[X]$ ile gösterilen X'in değişkesi*

$$D[X] = B[(X-\mu)^2]$$

olarak tanımlanır.

Tanım İki rasgele değişken X ve Y arasındaki birlikte değişke $\mu_y = B[Y]$ ve $\mu_x = B[X]$ olmak üzere,

$$D[X,\ Y] = B[(X-\mu_x)\,(Y-\mu_y)]$$

şeklinde tanımlanır.

2.7 Chebyshev Eşitsizliği ve Büyük Sayılar Yasası

Önerme Markov Eşitsizliği *Eğer X sadece negatif olmayan değerler alabiliyorsa, o zaman herhangi bir a > 0 değeri için,*

$$O\{X \geqslant a\} \leqslant \frac{B[X]}{a}$$

eşitsizliği vardır.

Sonuç Chebyshev Eşitsizliği *Eğer X ortalaması μ ve değişkesi σ^2 olan bir rasgele değişken ise, o zaman $k > 0$ şeklindeki herhangi bir değer için,*

$$O\{|X-\mu| \geqslant k\sigma\} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

olur.

Teorem (Büyük Sayıların Zayıf Yasası) $X_1, X_2, \ldots$ *μ ortalamasına sahip aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerin bir ardışımı olsun. O zaman, herhangi bir* $\epsilon > 0$ *için,*

$$O\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \to 0 \qquad n \to \infty$$

olur.

2.8 Bazı Kesikli Rasgele Değişkenler

İki-sanlı Rasgele Değişken

Her birinin sonucunun "başarılı" olması olasılığının o olduğu, n tane bağımsız denemenin gerçekleştirildiği varsayılsın. Eğer X, n denemedeki başarılı sonuç sayısını gösterirse, o zaman X, ölçümöteleri (n, o) olan iki-sanlı rasgele değişken olarak adlandırılır. Olasılık işlevi de,

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

n ögeli bir kümeden i ögenin seçilmesiyle oluşabilecek farklı alt kümelerin sayısı olan iki-sanlı katsayısı olmak üzere,

$$O_i \equiv O\{X = i\} = \binom{n}{i} o^i (1-o)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir.

Poisson Rasgele Değişken

0, 1, 2, . . . değerlerinden birini alan, olasılık işlevi,

$$o_i = O\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

şeklinde ifade edilen bir X rasgele değişkenine λ ölçümöteli Poisson rasgele bir değişken denir. e simgesi, erey$_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ şeklinde tanımlanan yaklaşık değeri 2.7183 olan ünlü bir matematiksel sabittir.

Geometrik Rasgele Değişken

Her birinin başarı olasılığının o olduğu bağımsız denemeler ardışımı göz önünde bulundurulsun. Eğer X ilk başarılı sonucun elde edildiği deneme sayısını ifade ederse, o zaman, ilk başarılı sonucun n'inci denemede ortaya çıkacağını, ilk $n - 1$ denemenin başarısızlık ve n'inci denemenin başarı ile sonuçlanması gerektiği dikkate alınarak

$$O\{X = n\} = o(1 - o)^{n-1}, \quad n \geqslant 1 \tag{2.7}$$

kolayca elde edilir. Böylece, denemeler bağımsız olduğundan eşitlik (2.7)'e ulaşılır.

Negatif İki-sanlı Rasgele Değişken

r tane başarılı sonuç elde etmek için her birinde başarı olasılığı o olan gerekli bağımsız deneme sayısını X ile ifade edecek olursak, o zaman X rasgele değişkenine ölçümöteleri n ve r olan negatif iki-sanlı, bazen de Pascal rasgele değişkeni denir. Böyle bir rasgele değişkenin olasılık işlevi aşağıdaki gibi verilir:

$$O\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} o^r (1-o)^{n-r}, \quad n \geqslant r \tag{2.8}$$

(2.8) eşitliğinin geçerli olduğunu anlamak için, r tane başarılı sonuca tam olarak n deneme ile ulaşılabileceğini, bunların ilk $n-1$ tanesinde $\binom{n-1}{r-1} o^{r-1}(1-o)^{n-r}$ olasılıkla $r-1$ tane ve n'inci denemenin de o olasılıkla başarılı sonuç olma zorunluğuna dikkat edin.

Hipergeometrik Rasgele Değişken

İçinde N tanesi açık M tanesi koyu renkli toplam $N + M$ adet top olan bir torbayı göz önünde bulunduralım. Eğer n çaplı bir örneklem rastgele seçilirse (n çaplı $\binom{N+M}{n}$ kadar olası örneklemden her birinin seçilme olasılığı eşit olmak üzere) o zaman seçilen açık renkli top sayısı X

$$O\{X = i\} = \frac{\binom{N}{i}}{\binom{N+M}{n}}$$

olasılık kütle işlevine sahip olur. Olasılık kütle işlevi bu şekilde verilen bir X rasgele değişkenine hipergeometrik rasgele değişken denir.

Tekdüze Dağılımlı Rasgele Değişken

Rasgele bir X değişkeninin olasılık yoğunluk işlevi,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

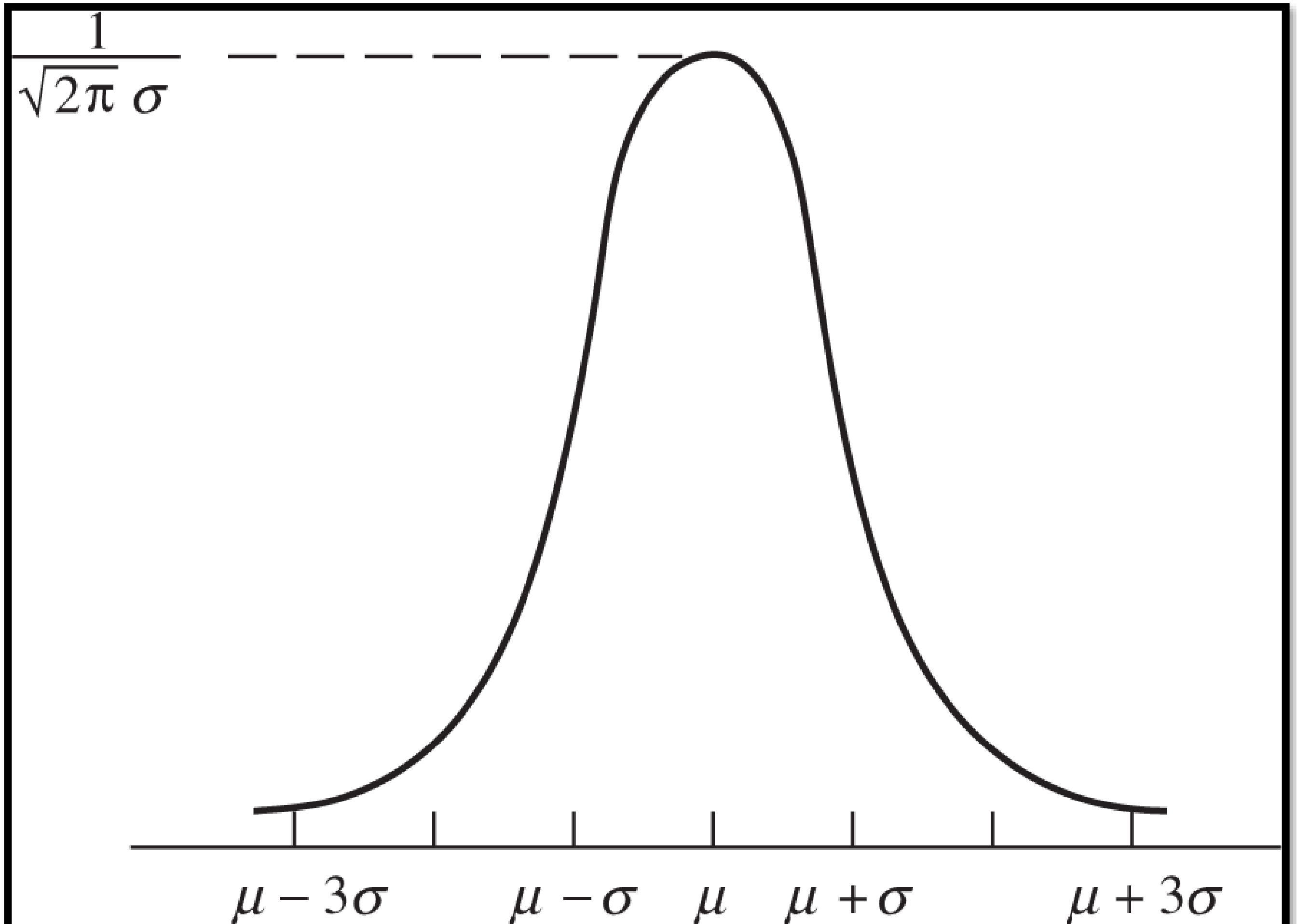
biçimindeyse, (a, b), $a < b$ aralığı üzerinde tekdüze dağılıma sahiptir denir. Bir başka deyişle, eğer X'in tüm kütlesi bu aralık üzerindeyse ve bu aralıktaki her hangi bir noktaya seçkisiz "yakın" ise, X (a, b) aralığı üzerinde tekdüze dağılır.

Normal Rasgele Değişken

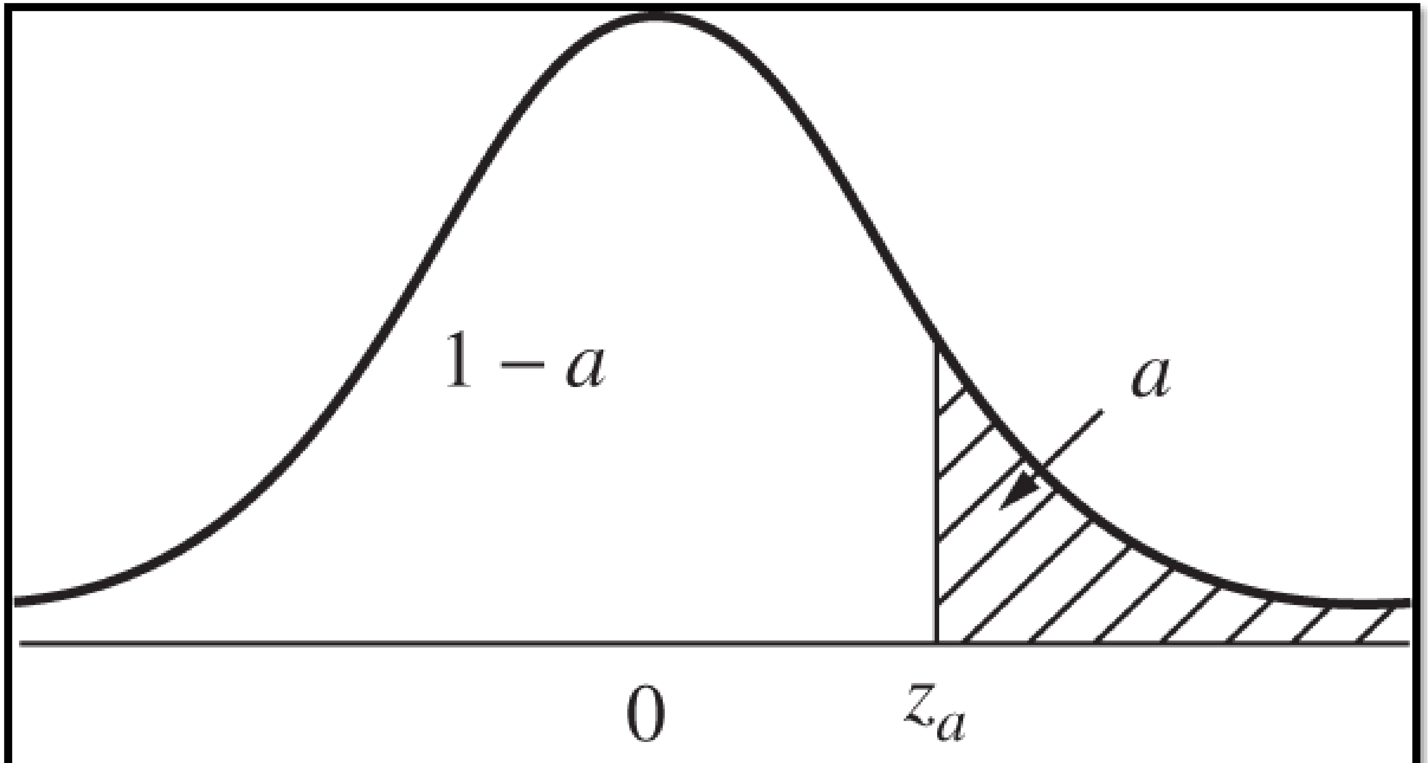
Eğer bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk işlevi,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

şeklinde veriliyor ise, buna ortalaması μ ve değişkesi σ^2 olan normal dağılıma sahip rasgele bir değişken denir. Normal dağılımın yoğunluk işlevi μ'ye göre çana benzer bir eğridir (bk. Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Normal yoğunluk işlevi.



Şekil 2.2. $P\{Z > z_a\} = a.$

Üstel Rasgele Değişkenler

$\lambda > 0$ değerleri için,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty$$

olasılık yoğunluk işlevine sahip olan sürekli bir rasgele değişken, λ ölçümöteli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olarak adlandırılır. Bunun birikimli dağılımı da,

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty$$

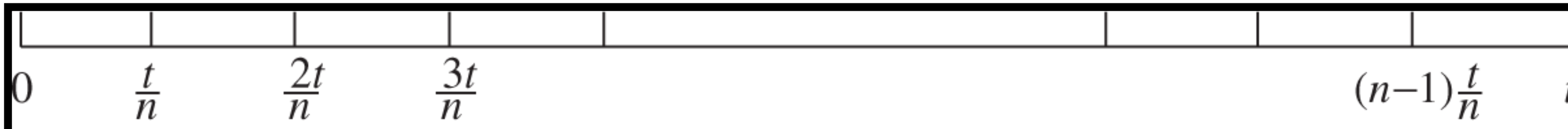
şeklinde ifade edilir.

Poisson Süreçler ve Gama Rasgele Değişkenler

"Olay"ların rastgele zamanlarda ortaya çıktığı ve $N(t)$'nin de $[0,t]$ zaman aralığında ortaya çıkan olayların sayısını ifade ettiği varsayılsın. $\lambda > 0$ olmak üzere ve

(a) $N(0) = 0$
(b) Ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olay sayıları bağımsız
(c) Verilen bir aralıkta gerçekleşen olay sayısının dağılımı aralığın merkezine değil sadece uzunluğuna bağlı
(d) $\text{erey}_{h\to 0} \frac{P\{N(h)=1\}}{h} = \lambda.$
(e) $\text{erey}_{h\to 0} \frac{P\{N(h)\geqslant 2\}}{h} = 0.$

olma koşulları sağlanıyorsa, bu olayların λ *sıklıklı Poisson bir süreç oluşturduğu* söylenir. Burada Koşul (a) sürecin 0 anında başladığını ifade etmektedir. Koşul (b) t anına kadar gerçekleşen olay sayısı [yani, $N(t)$]'nin t ve $t + s$ arasında gerçekleşen olay sayısı [yani, $N(t + s) - N(t)$]'den bağımsız olduğunu ifade eden *bağımsız artış varsayımı*dır.



Şekil 2.3. $[0, t]$ aralığı.

Türdeş Olmayan Poisson Süreçler

Modelleme açısından Poisson sürecin temel zayıflığı, olayların eşit uzunlukta aralıkların her birinde seçkisiz olarak oluştuğu varsayımıdır. Bu varsayımı hafifleten bir genelleme, türdeş- olmayan ya da durağan-olmayan bir sürece yol açar.

Koşullu Değişke Formülü

$$\mathrm{D}[X] = B[\mathrm{D}[X|Y]] + \mathrm{D}[B[X|Y]]$$