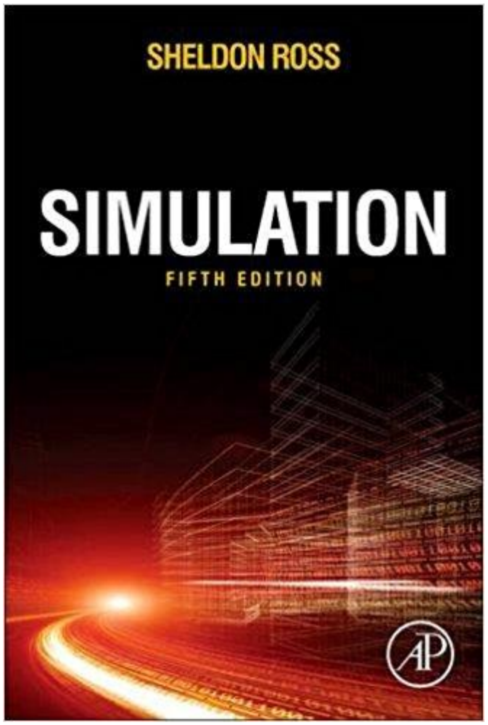
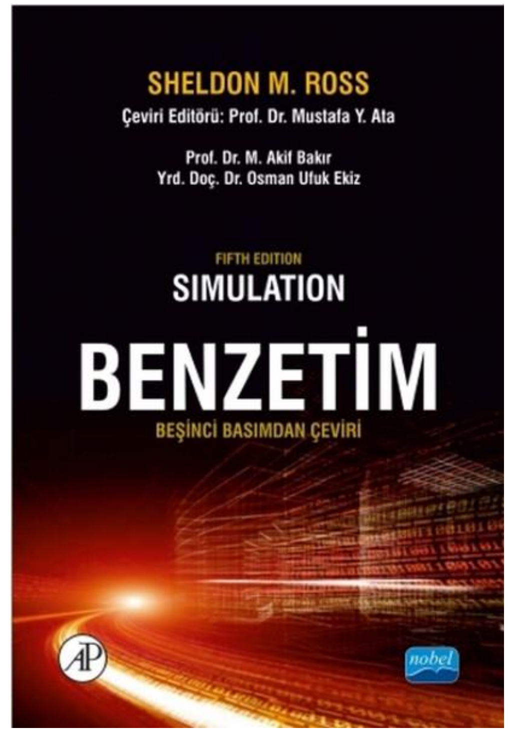
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 6
Çok-Değişkenli Normal Dağılım
ve
Bağlaçlar

Giriş

Bu bölümde çok-değişkenli normal dağılımı tanıtacağız ve bu ortak dağılıma sahip rasgele değişkenlerin nasıl üretileceğini göstereceğiz. Aynı zamanda paylı dağılımları bilinen rasgele değişkenleri belirlemek için ortak dağılımların seçiminde yararlı olan bağlaçları da tanıtacağız.

6.1 Çok-değişkenli Normal

$Z_1, \ldots, Z_n$, her biri 0 ortalamalı ve 1 değişkeli bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olsun. Eğer, $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$ ve $\mu_i, i = 1, \ldots, n$, sabitleri için

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{11}Z_1 + a_{12}Z_2 + \cdots + a_{1m}Z_m + \mu_1 \\
\cdots &= \cdots \\
\cdots &= \cdots \\
X_i &= a_{i1}Z_1 + a_{i2}Z_2 + \cdots + a_{im}Z_m + \mu_i \\
\cdots & \\
\cdots & \\
X_n &= a_{n1}Z_1 + a_{n2}Z_2 + \cdots + a_{nm}Z_m + \mu_n
\end{aligned}
$$

olursa, o zaman $X_1, \ldots, X_n$ yöneyinin *çok-değişkenli normal dağılım*a sahip olduğu söylenir. Yani, her birisi bağımsız standart normal değişkenlerin aynı kümesinin doğrusal bir bileşimi artı bir sabiti ise, $X_1, \ldots, X_n$ çok-değişkenli normal bir dağılıma sahiptir. Bağımsız normal değişkenler toplamının kendisi de normal olduğundan, her X_i'nin kendisi de normal bir değişkendir.

6.2 Çok-değişkenli Normal Rasgele Bir Yöneyin Üretilmesi

Örnek 6a Iki-değişkenli Normal Dağılım μ_i ortalamalı, $\sigma_i^2, i = 1, 2$ değişkeli ve $c = D[X_1, X_2]$ birlikte-değişkeli çok-değişkenli normal yöneyi üretmek istediğimizi düşünelim. ($n = 2$ olduğunda, çok-değişkenli normal yöneye *iki-değişkenli normal* denir.) Eğer Choleski ayrıştırma dizeyi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

ise o zaman

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c \\ c & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

yani,

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c \\ c & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

denklemlerini çözmemiz gerekir.

Bu denklemler,

$$\begin{aligned} a_{11}^2 &= \sigma_1^2 \\ a_{11}a_{21} &= c \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= \sigma_2^2 \end{aligned}$$

biçimine dönüşür.

6.3 Bağlaçlar

Örnek 6b Gausgil Bağlaç Modellemede kullanılan çok yaygın bir bağlaç Gausgil bağlaçtır. Φ standart normal dağılım işlevi olsun. Eğer X ve Y, ortak dağılımları ρ ileşkeli iki-değişkenli normal dağılım olan standart normal rasgele değişkenlerse, o zaman

$\Phi(X)$ ve $\Phi(Y)$'nin ortak dağılımına Gausgil bağlaç denir. Yani,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= O(\Phi(X) \leq x, \Phi(O) \leq y) \\ &= O(X \leq \Phi^{-1}(x), O \leq \Phi^{-1}(y)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)} dydx \end{aligned}$$

bir Gausgil bağlaçtır. $\square$

Örnek 6c Marshall-Olkin Bağlacı Bir kuyruk dağılımıyla üretilmiş X ve Y arasında pozitif bir ilişki gösteren $X = Y$'ye pozitif bir olasılık veren bağlaç, Marshall-Olkin bağlacıdır. Onu üreten model şöyle ortaya çıkar. Üç tür sıkıntı olduğunu düşünün. T_i, i türünde bir sıkıntı ortaya çıkıncaya kadar geçen zamanı göstersin ve T_1, T_2, T_3 sırasıyla $B[T_i] = 1/\lambda_i$ ortalamalı bağımsız üstel rasgele değişkenler olsun. Şimdi, birinci tür sıkıntı durumunda 1. tür, ikinci tür sıkıntı durumunda 2. tür, ve üçüncü tür sıkıntı durumunda da her ikisinin başarısızlıkla sonuçlandığı iki olgu olduğunu varsayalım. X, 1. olgunun başarısız olduğu zamanı ve Y, 2. olgunun başarısız olduğu zamanı göstersin. Birinci ya da üçüncü tür sıkıntı durumunda 1. olgu başarısızlıkla sonuçlanacağı için, bağımsız üstel değişkenlerin en küçüğünün sıklıkların toplamına eşit bir sıklıkla üstel olması gerçeğinden, X'in $\lambda_1 + \lambda_3$ sıklıklı üstel olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer biçimde, Y de $\lambda_2 + \lambda_3$ sıklıklı üsteldir. Yani, X ve Y sırasıyla,

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)x}, \quad x \geq 0 \tag{6.11}$$

$$G(y) = 1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)y}, \quad y \geq 0 \tag{6.12}$$

dağılım işlevlerine sahiptirler.

Örnek 6d Gausgil bir bağlaç kullanılarak, paylı dağılımları $F_1, \ldots, F_n$ ve değişkeleri $D(X_i, X_j)$, $i \neq j$ olan $X_1, \ldots, X_n$'leri üretmek için aşağıdaki yordam kullanılabilir:

1. Ortalamaların tümünün 0, değişkelerinin tümü 1 ve $D[W_i, W_j] = D[X_i, X_j]$, $i \neq j$ olan çok-değişkenli normal bir dağılımdan $W_1, \ldots, W_n$'leri üretmek için Cholesski ayrıştırma yöntemini kullan.
2. Ortak dağılımları Gausgil bağlaç olan, $\Phi(W_i)$, $i = 1, \ldots, n$ değerlerini hesapla.
3. $F_i(Xi) = \Phi(W_i)$, $i = 1, \ldots, n$ olsun.
4. $X_i = F_i^{-1}(\Phi(W_i))$, $i = 1, \ldots, n$'yi elde et. □

Örnek 6e Bir Marshall-Oklin kuyruk bağlacı kullanarak paylı dağılımları H ve R olan V, W'yi üretmek istediğimizi varsayalım. Bağlaçtan doğrudan üretmek yerine, önce X, Y Marshall-Olkin yöneyini üretmek daha kolaydır. X ve Y'nin paylı dağılım işlevleri F ve G ile gösterildiğinde, bağlacın dağılımına sahip yöneyin üretilen değeri olarak,

$1 - F(X) = e^{-(\lambda_1+\lambda_3)X}$, $1 - G(Y) = e^{-(\lambda_2+\lambda_3)Y}$ alınabilir. Sonra bu değerler $H(V)$ ve $R(W)$'ye eşitlenerek V ve W için çözülür. Yani, aşağıdaki yaklaşımı kullanabiliriz:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sıklıklı bağımsız üstel T_1, T_2, T_3 rasgele değişkenlerini üret.
2. $X = \text{enk}(T_1, T_3)$, $Y = \text{enk}(T_2, T_3)$ olsun.
3. $H(V) = e^{-(\lambda_1+\lambda_3)X}$, $R(W) = e^{-(\lambda_2+\lambda_3)Y}$ olsun.
4. Öncekini V ve W'yi elde etmek için çöz. □