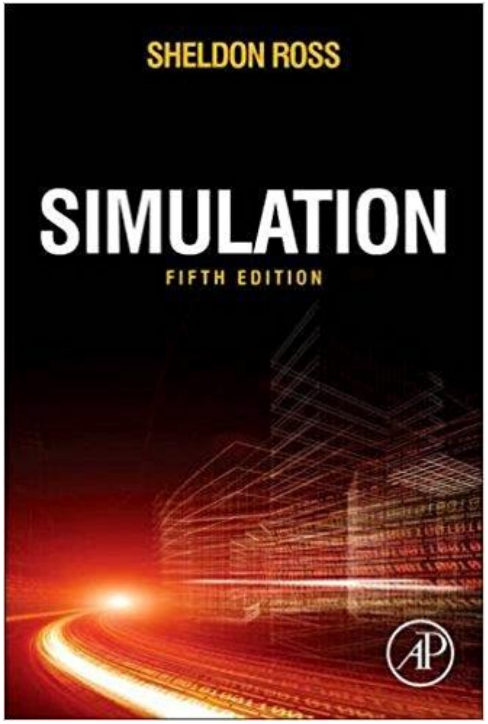
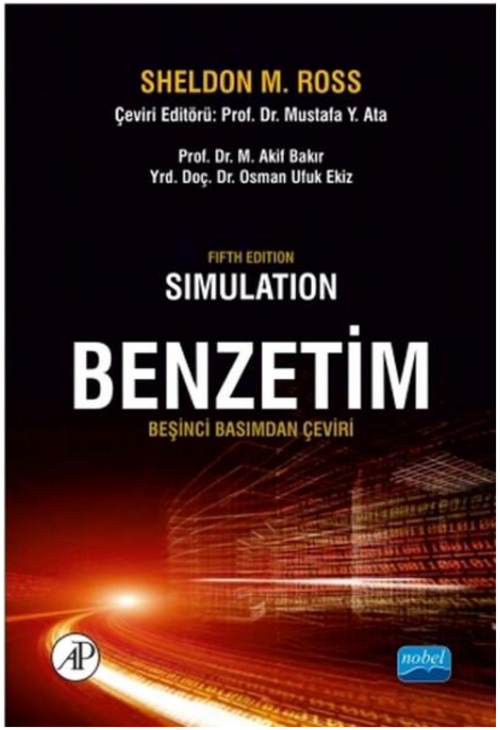
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 9
Değişke Küçültme Teknikleri

Giriş

Bir benzetim çalışması için tipik bir senaryoda, kişi stokastik modelle bağlantılı ölçünöte θ'yı belirlemekle ilgilenir. θ'yı tahmin etmek için, diğer şeylerin yanı sıra X çıktısını elde etmek için modelin benzetimi yapılır. i'inci yürütmenin çıktısı X değişkeni olan benzetimin işletilmesi tekrarlanır. Benzetimin n defa çalıştırılması gerçekleştirildikten ve $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$, θ'nın tahmini olarak elde edildikten sonra benzetim çalışması durdurulur. Bu sonuç θ'nın yansız tahmini olduğundan, bunun ortalama hata karesi değişkesine eşittir. Yani,

$$\text{OHK} = \text{B}[(\overline{X} - \theta)^2] = \text{D}[\overline{X}] = \frac{\text{D}[X]}{n}$$

9.1 Karşıt Değişkenlerin Kullanımı

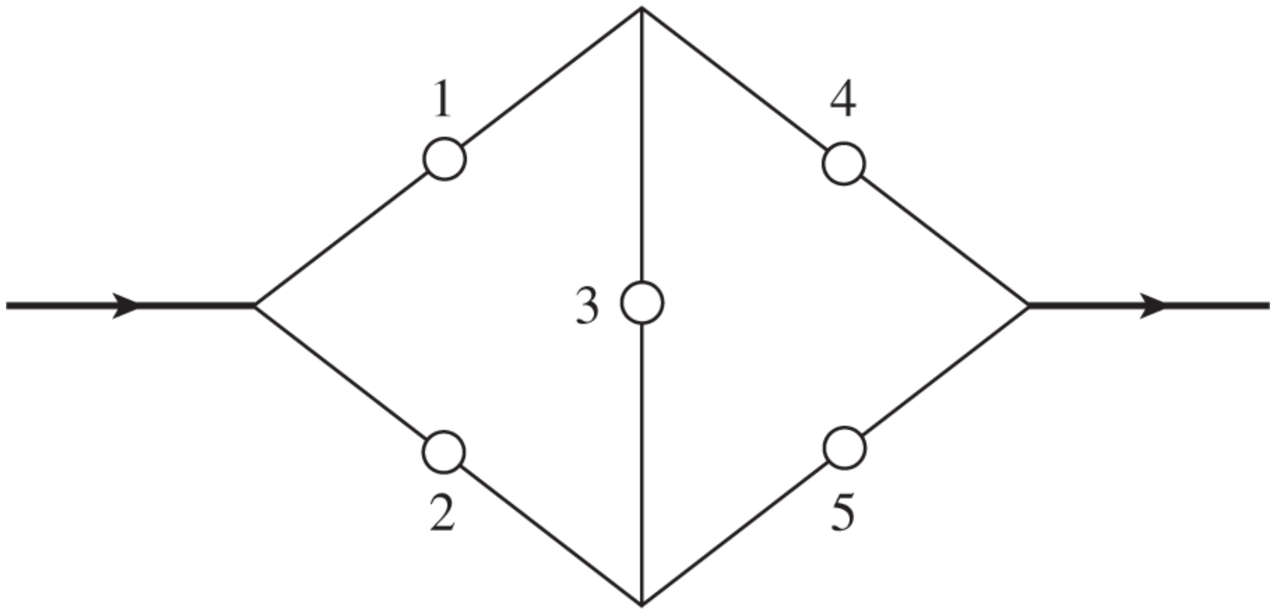
Örnek 9b Güvenilirlik işlevinin benzetimi Her biri çalışan ya da çalışmayan n bileşenden oluşan bir dizgeyi göz önüne alalım.

$$s_i = \begin{cases} 1 & i \text{ bileşeni çalışıyorsa} \\ 0 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$'ye konak yöneyi diyeceğiz. Aynı zamanda,

$$\phi(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} 1 & \text{dizge, } s_1, \ldots, s_n \text{ konaklarında çalışıyorsa} \\ 0 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olacak biçimde, $\phi(s_1, \ldots, s_n)$ azalmayan bir işlev olsun. $\phi(s_1, \ldots, s_n)$'ye yapı işlevi denir.



Şekil 9.1. Köprü yapısı.

Örnek 9c Bir Kuyruk Dizgesinin Benzetimi Bir kuyruk dizgesini göz önüne alalım. Gelen i'inci müşterinin kuyrukta oyalanma süresi D_i olsun ve kuyruğa ilk gelen n müşterinin kuyrukta oyalanma sürelerinin toplamı

$$X = D_1 + \cdots + D_n$$

olmak üzere, $\theta = B[X]$'i tahmin etmek için dizgenin benzetimini yapmak istediğimizi varsayın. $I_1, \ldots, I_n$ kuyruğa ilk n gelişler arası süreyi (yani, I_j; j-1 ve j'inci müşterilerin geliş zamanları arasındaki süreyi göstermektedir), $S_1, \ldots, S_n$'de dizgenin ilk n müşteri için hizmet zamanlarını göstersin. Aynı zamanda bu rasgele değişkenlerin bağımsız olduğunu varsayalım. Birçok dizgede, X; $2n$ sayıdaki rasgele $I_1, \ldots, I_n, S_1, \ldots, S_n$ değişkenlerinin,— diyelim ki, h gibi—,

$$X = h(I_1, \ldots, I_n, S_1, \ldots, S_n)$$

biçiminde bir işlevidir.

Örnek 9d Benzetim yoluyla

$$\theta = B[e^U] = \int_0^1 e^x\,dx$$

ölçümötesini tahmin etmek istediğimizi varsayalım. (Pek tabii ki, $\theta = e - 1$ olduğunu biliyoruz. Ancak, bu örneğin temel amacı karşıt değişkenleri kullanarak nasıl bir iyileşme sağlanabileceğini göstermektir.) $h(u) = e^u$ işlevi tekdüze işlev olduğundan, karşıt değişken yaklaşımı, değerini şimdi belirleyeceğimiz, değişkede bir küçülmeye yol açar. Başlamadan

$$\begin{aligned} D[e^U, e^{1-U}] &= B[e^U e^{1-U}] - B[e^U]B[e^{1-U}] \\ &= e - (e-1)^2 = -0.2342 \end{aligned}$$

olduğunu söyleyelim.

Örnek 9e e′nin tahmini Rasgele sayıların bir dizisini düşünelim ve N'de bir önceki sayıdan büyük olan ilk sayının sırası; yani,

$$N = \text{enk}(n : n \geqslant 2, U_n > U_{n-1})$$

olsun.

Şimdi, $U_1, \ldots, U_n$'nin tüm olası sıralamaları seçkisiz olmak üzere,

$$\begin{aligned} O\{N > n\} &= O\{U_1 \geqslant U_2 \geqslant \cdots \geqslant U_n\} \\ &= 1/n! \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$O\{N = n\} = O\{N > n-1\} - O\{N > n\} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$$

ve

$$B[N] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e$$

olur.

9.2 Denetim Değişkeni Kullanma

bu da aynı zamanda θ'nın yansız tahmin edicisidir. c'nin en iyi değerini belirlemek için

$$D[X + c(Y - \mu_y)] = D[X + cY]$$
$$= D[X] + c^2 D[Y] + 2c\ D[X, Y]$$

olduğunu dikkate alarak, basit matematiksel işlemler,

$$c^* = -\frac{D[X, Y]}{D[Y]} \qquad (9.1)$$

olmak üzere, yukarıdakinin $c = c^*$ değerinde en küçükleneceğini gösterir ve $c = c^*$ değeri için tahmin edicinin değişkesi de

$$D[X + c^*(Y - \mu_y)] = D[X] - \frac{[D[X, Y]]^2}{D[Y]} \qquad (9.2)$$

Örnek 9f Örnek 9b'deki gibi,

$$S_i = \begin{cases} 1, & U_i < o_i \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$r(o_1, \ldots, o_n) = B[\phi(S_1, \ldots, S_n)]$$

güvenilirlik işlevini benzetim kullanarak tahmin etmek istediğimizi varsayalım. $B[S_i] = o_i$ olduğundan,

$$B\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = \sum_{i=1}^{n} o_i$$

yazılabilir. Buradan hareketle, dizgenin çalışan bileşenlerinin sayısı $Y \equiv \sum_{i=1}^{n} S_i$, $X \equiv \phi(S_1, \ldots, S_n)$ tahmin edicisinin denetim değişkeni olarak kullanabilir. $\sum_{i=1}^{n} S_i$ ve $\phi(S_1, \ldots, S_n)$'nin her ikisi de S_i'nin artan işlevi olduğundan, pozitif ileşkelidir ve bu nedenle de c^*'ın işareti negatiftir. □

Örnek 9h Örnek 9d'deki gibi $\theta = B[e^U]$'yu benzetim yoluyla hesaplamak istediğimizi varsayalım. Burada, denetim için kullanılacak değişken doğal olarak rasgele sayı U'dur. Ham tahmin edicinin üzerinde nasıl bir iyileşme sağlanabileceğini görmek için,

$$\begin{aligned} D[e^U, U] &= B[Ue^U] - B[U]B[e^U] \\ &= \int_0^1 xe^x\,dx - \frac{(e-1)}{2} \\ &= 1 - \frac{(e-1)}{2} = 0.14086 \end{aligned}$$

olduğunu dikkate alalım. $D[U] = \frac{1}{12}$ olduğundan, Örnek 9d'de elde edilen $D[e^U] = 0.2420$ değeri ve Eşitlik (9.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned} D\left[e^U + c^*\left(U - \frac{1}{2}\right)\right] &= D[e^U] - 12(0.14086)^2 \\ &= 0.2420 - 0.2380 = 0.0039 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, denetim değişkeni U'nun kullanılması, değişkede yüzde 98.4'e varan bir küçülme sağlar. □

Örnek 9i Ögeleri Sıralı Bir Dizelge Oluşturma Sıralı bir dizelgesi oluşturulmak istenen, 1'den n'ye kadar numaralandırmış n ögelik bir küme verilmiş olsun. Her defasında, $o(i)$, $\sum_{i=1}^{n} o(i) = 1$ olasılıkla i'inci öge istenmektedir. İstenen öge aynı konumda olması gerekmeksizin dizelgeye yeniden konmaktadır. Örneğin, bilinen bir yeniden sıralama kuralı, çekilen ögenin yerini kendisinden bir önceki ögeyle değiştirmektir. Böylece, $n = 4$ ve geçerli sıralama 1, 4, 2, 3 biçimindeyse, bu durumda, çekilen sayı 2 olduğunda bu kurala göre yeni sıralama 1, 2, 4, 3 olur. Eşit şansa sahip $n!$ sayıdaki farklı sıralama düzeninden birisini başlangıç sıralama düzeni olarak alıp, değiş tokuş kuralını kullanarak başlayıp, istenen ilk N ögenin sıralarının beklenen toplam değerini belirlemek istediğimizi varsayalım. Bu işi benzetim yoluyla etkin biçimde nasıl başarabiliriz?

Örnek 9j 21 Oyunu 21 oyunu dağıtıcının çok sayıdaki oyun kağıdı destesini karması, kullanılan kağıtları dışarı koyması ve sonunda belli bir sınırın altındaki kağıtları yeniden karmasıyla oynanan bir oyundur. Yeni bir turun dağıtıcının kartları yeniden karmasıyla başladığını söyleyelim ve o turda oynanmış "kartların sayıldığı" ve "sayılan kartlar"a bağlı olarak para koyma gibi sabit bir strateji kullandığını varsayarak, benzetim yoluyla her turda bir oyuncunun beklenen kazancı olan $B[X]$'i tahmin etmek istediğimizi düşünelim. Aynı zamanda, oyun, dağıtıcıya karşı tek bir oyuncu ile oynanıyor olsun.

Bu oyundaki rasgelelık kartların dağıtıcı tarafından karılmasıyla oluşmaktadır. Eğer dağıtıcı, 52 karttan oluşan k tane deste kullanırsa, 1'den $52k$'ya kadar sayıların rasgele bir dizilimi olan $I_1, \ldots, I_{52k}$'yı üreterek kartları karabiliriz.

9.3 Koşullamayla Değişke Küçültme

Bölüm 2 Kısım 2.10’da verilen

$$D[X] = B\left[D\left[X|Y\right]\right] + D[B[X|Y]]$$

koşullu değişke formülünü hatırlayalım. Değişke negatif değerli olamayacağı için, sağ taraftaki her iki terim de negatif değerli olamaz ve

$$D[X] \geqslant D[B[X|Y]] \tag{9.4}$$

olduğu görülür. Şimdi, X bir benzetim çıktısı olmak üzere $\theta = B[X]$’in değerini belirlemek için bir benzetim yapmak istediğimizi varsayalım.

Örnek 9k π'yi tahmin etmek için benzetim kullanımını yeniden ele alalım. Bölüm 3'teki Örnek 3a'da, merkezi başlangıç noktasında olan 4 birim^2'lik bir kare alandan rastgele seçilen bir noktanın 1 birim yarıçaplı dairenin içine hangi sıklıkta düşeceğini belirleyerek π'yi nasıl tahmin edeceğimizi göstermiştik. Özel bir durum olarak, U_i, $i = 1, \ldots n$, rasgele sayılar olmak üzere, $V_i = 2U_i - 1$ olarak tanımlanır ve gösterge değişken olarak da I'yı,

$$I = \begin{cases} 1, & V_1^2 + V_2^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde ifade edersek, Örnek 3a'da gösterildiği gibi $B[I] = \pi/4$ olur.

Örnek 9l r çeşit kupon olduğunu ve önceki toplanan kuponlardan bağımsız olarak toplanan her yeni kuponun o_i, $\sum_{i=1}^{r} o_i = 1$ olasılıkla i türünden olduğunu varsayalım. Aynı zamanda, bir defada bir kupon toplandığını ve i tür kupondan n_i ya da daha fazla toplanana kadar kupon toplama işine devam edildiğini varsayalım. N gerekli kuponların sayısını tanımlamak üzere, hem $B[N]$ hem de $O(N > m)$'yi benzetimle tahmin etmek isteyelim.

Örnek 9m $X_1, \ldots$ bağımsız ve aynı dağılımlı, negatif-olmayan tamsayı değerli rasgele değişken N'den bağımsız pozitif rasgele değişkenler dizisi olsun.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

rasgele değişkenine *bileşik* rasgele değişken denir. Bir sigortacılık uygulamasında, sigorta şirketine yapılan i'inci hasar başvurusunun miktarı, X_i; belli bir t zamanına kadar başvuruların sayısı, N; t zamanına kadar olan toplam hasar başvurularının parasal miktarı S ile gösterilsin. Bu tür uygulamalarda, genellikle N'nin ya Poisson rasgele bir değişken (bu durumda *S, bileşik Poisson rasgele değişken* olarak adlandırılır) ya da, bir başka Λ rasgele değişkeni varsa, karma Poisson rasgele bir değişken olduğu varsayılır.

Tanım: Eğer $\{N = n\}$ olayı $X_1, X_2, \ldots, X_n$'nin değerleri tarafından belirleniyorsa, negatif-olmayan tamsayı değerli rasgele değişken N'ye rasgele değişkenler ardışımı $X_1, X_2, \ldots$ için durdurma zamanı denir.

Durdurma zamanının arkasındaki düşünce, $X_1, X_2, \ldots$ rasgele değişkenlerini, ileridekilere değil gözlenmiş olanlara bağlı bir ana kadar ardışık olarak gözleyip, o noktada durmamızdır. Şimdi Wald denklemini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Wald Denklemi: Sonlu bir $B[X]$ ortalamaya sahip bağımsız ve aynı dağılımlı $X_1, X_2, \ldots$ rasgele değişkenler ardışımı için durdurma zamanı N ise, o zaman $B[N] < \infty$ olmak üzere,

$$B\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = B[N]B[X]$$

eşitliği yazılabilir

Örnek 9n Sınırlı Bir Kuyruk Modeli Yalnızca dizgede hazır bulunan diğer müşterilerin sayısı N'den daha azsa yeni bir girişe izin verilen bir kuyruk dizgesini göz önüne alın. Dizgeye geldiğinde, dizgede N sayıda diğer müşteriyle karşılaşan herhangi bir müşteri dizgenin kaybı olarak değerlendirilmektedir. Ayrıca potansiyel müşterilerin λ ölçümöteli Poisson sürecine göre dizgeye geldiklerini; ve belli bir t zamanında kaybedilen müşterilerin beklenen sayısını benzetimle tahmin etmek istediğimizi varsayalım.

Örnek 9o Bir kuyruk dizgesindeki ilk gelen n müşterinin dizgede harcadığı zamanların beklenen toplamını tahmin etmek istediğimizi varsayalım. Bir başka deyişle, i'inci müşterinin dizgede harcadığı zaman W_i ise,

$$\theta = B\left[\sum_{i=1}^{n} W_i\right]$$

değerini tahmin etmek isteyelim. i'inci müşterinin dizgeye geldiği andaki "dizge konağı" S_i ile gösterilsin ve

$$\sum_{i=1}^{n} B[W_i | S_i]$$

tahmin edicisini göz önünde bulunduralım.

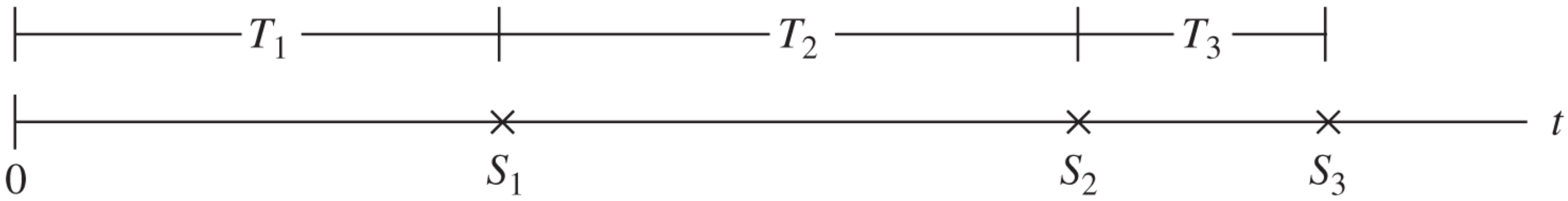
Örnek 9p Ağırlıkları w_i olan $n + m$ sayıdaki hücre kümesini ele alalım. $1, \ldots,$ n'e hücrelerin kanserli; $n + 1, \ldots, n + m$ hücrenin ise normal olduğunu, ve hücrelerin bir defada bir hücre olmak üzere aşağıda açıklandığı biçimde öldürüldüğünü düşünün. Herhangi bir anda, canlı hücrelerden oluşan küme S ise, sıralamadan bağımsız olarak S'de olmayan hücreler öldürülmüş olacak ve bir sonraki $\frac{w_i}{\sum_{j \in S} w_j}$ olasılıkla öldürülecek i, $i \in S$ hücresidir. Bu nedenle, i hücresi $\frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n+m} w_j}$ olasılıkla ilk öldürülecek hücre; öldürülen ilk hücre i hücresi iken, sonraki öldürülecek hücre $\frac{w_k}{\sum_{j \neq i} w_j}$ olasılıkla k, $k \neq i$ hücresi, ve böyle sürüp gidecektir. Bu hücreleri öldürme süreci ilk n hücrenin tamamı (kanserli hücreler) öldürülene kadar devam eder. Tüm kanserli hücrelerin öldürülmüş olduğu anda canlı olan normal hücrelerin sayısı N ile gösterilsin ve $O\{N \geqslant k\}$ olasılığını belirlemek isteyelim.

t Zamanına Kadar Yapılan Yenilemelerin Beklenen Sayısını Tahmin Etme

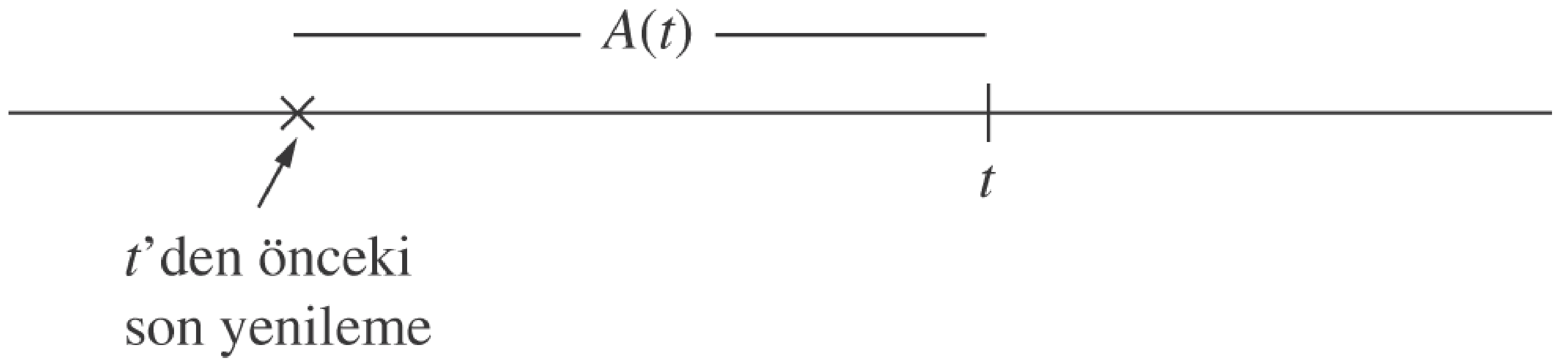
"Olaylar"ın zaman içinde rastgele oluştuğunu varsayın. Birinci olayın zamanını T_1, birinci ve ikinci olay arasındaki zamanı T_2 ve genel olarak, T_i de $(i-1)$'inci ve i'inci olay arasındaki zamanı tanımlasın. Eğer,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

olarak tanımlanırsa, ilk olay S_1 zamanında, ikinci olay S_2 zamanında, ve genel olarak, n'inci olay S_n zamanında oluşur (bk. Şekil 9.2).



Şekil 9.2. x = olay



Şekil 9.3. t anındaki yaş.