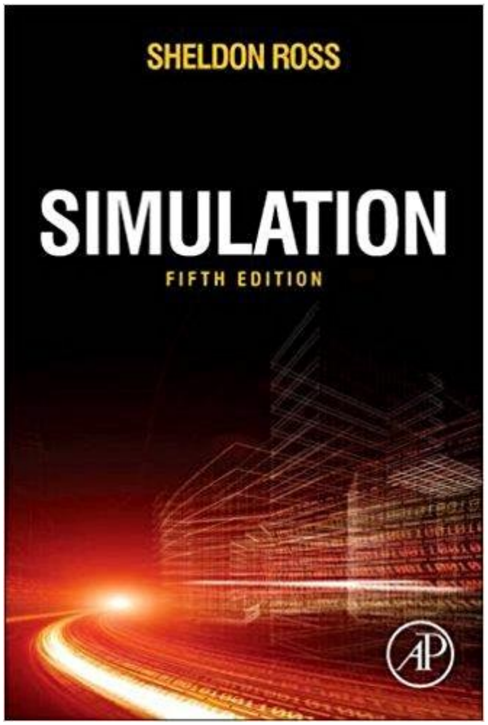
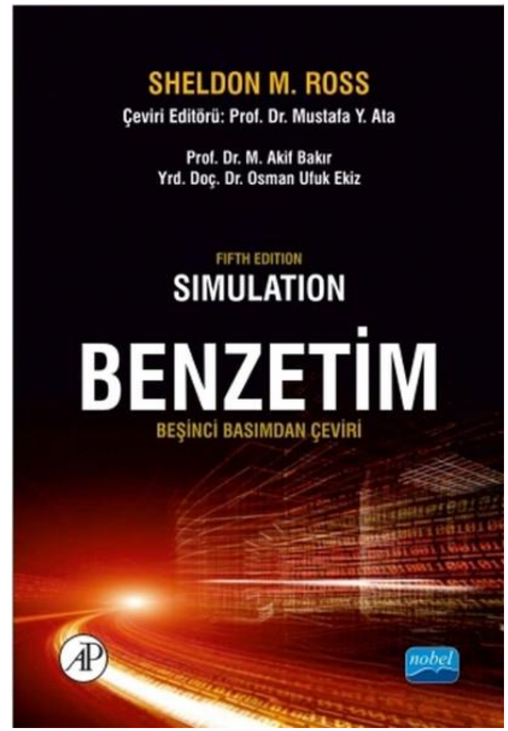
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





9.4 Tabakalı Örnekleme

Uyarı Tabakalı örnekleme tahmin edicisinin değişkesi, S_i^2, $Y = y_i$, $i = 1, \ldots, k$ koşulu altında gerçekleştirilen no_i tane benzetimden elde edilen örneklem değişkesi olarak tanımlanarak tahmin edilebilir. Bu durumda $D[X|Y = y_i]$'nin sapmasız bir tahmin edicisi S_i^2 iken $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} o_i S_i^2$'de, $D[\mathcal{E}]$'nun sapmasız bir tahmin edicisidir. □

Örnek 9q İyi günlerde müşteriler sonsuz bir hizmet kuyruğuna saatte 12 sıklıklı Poisson bir sürece göre gelirken, diğer günlerde saatte 4 sıklıklı Poisson bir sürece göre gelmektedir. Tüm günlerdeki hizmet süreleri saatte 1 sıklıklı üstel dağılmaktadır. Her gün 10 saat hizmet verildikten sonra dizge kapatılmakta ve hizmet için kuyrukta bekleyen tüm müşterilerin hizmet alamadan dizgeyi terk etmesi istenmektedir. Haftanın her gününün bağımsız olarak 0.05 olasılıkla iyi bir gün olacağını ve hizmet verilemeyen günlük ortalama müşteri sayısı θ'yı benzetimle tahmin etmek istediğimizi varsayalım.

Örnek 9r Örnek 9k'de

$$\frac{\pi}{4} = B\left[\sqrt{(1 - U^2)}\right]$$

olduğunu göstermiştik. π'yi $U_1, \ldots, U_n$'leri üretip,

$$\hat{\pi} = \frac{4}{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 - [(U_j + j - 1)/n]^2}$$

tahmin edicisini kullanarak tahmin edebiliriz. Aslında, yukarıdaki tahmin edici karşıt değişkenler kullanılarak

$$\hat{\pi} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{1 - [(U_j + j - 1)/n]^2} + \sqrt{1 - [(j - U_j)/n]^2} \right)$$

biçiminde iyileştirilebilir.

Önerme

$$B[D[X|Y]] \leqslant \quad D[X] - \frac{D^2[X,Y]}{D[Y]}$$

Önermeyi ispatlamak için önce temel bir teoreme gerek duyacağız..

Temel Teorem

$$D[X,\ Y] = D[B[X|Y],Y]$$

Örnek 9s Bir video poker oyununda, oyuncu makineye 1 dolar atmakta ve makine beş kâğıtlık rasgele bir el dağıtmaktadır. Sonra oyuncunun bu kâğıtlardan kimisini atmasına izin verilerek, atılan yerine geri kalan 47 kâğıt arasından yeni bir tanesi konmaktadır. Elindeki son kâğıtların düzenine göre oyuncuya ödeme yapılmaktadır.

El	Ödeme
Royal renk	800
Sıralı renk	50
Kare	25
Ful	8
Renk	5
Kent	4
Üçlü	3
İki çift	2
Yüksek çift (Vale ya da daha iyisi)	1
Diğer	0

9.5 Tabakalı Örnekleme Uygulamaları

- İzleyen alt kısımlarda, Poisson gelişli dizgelerin çözümlenmesinde, birçok değişkenin tekdüze işlevlerinde, ve bileşik rasgele yöneylerde tabakalamalı örnekleme düşüncesinin nasıl kullanılacağını göstereceğiz.

9.5.1 Poisson Gelişli Dizgelerin Çözümlenmesi

Örneğin, çok sunuculu paralel bir kuyruk dizgesinde D, t anına kadar gelişlerin dizgedeki oyalanmalarının tümünün toplamı olabilir. $B[D]$'yi benzetimle tahmin etmek için aşağıdaki yaklaşım önerilebilir. t anına kadar gelişlerin sayısı $N(t)$ olmak üzere, herhangi belirli bir tamsayı değer m için, önce

$$B[D] = \sum_{j=0}^{m} B[D|N(t) = j]e^{-\lambda t}(\lambda t)^j/j! + B[D|N(t) > m] \times \left(1 - \sum_{j=0}^{m} e^{-\lambda t}(\lambda t)^j/j!\right) \tag{9.9}$$

olduğuna dikkat edelim. $B[D|N(t) = 0]$'nin kolayca hesaplanabildiğini ve böylece her gelişin hizmet süresiyle birlikte geliş zamanlarının bilinmesiyle D'nin belirlenebileceğini varsayalım.

ADIM 1: $N = 1$ olsun. Rasgele bir U_1 sayısı üret ve $S = \{tU_1\}$ olsun.

ADIM 2: tU_1 anındaki gelişle $N(t) = 1$ olduğu varsayılsın. Bu gelişin hizmet süresini üret, ve buna göre D'yi hesapla. Bunu, D_1 ile göster.

ADIM 3: $N = N + 1$ olsun.

ADIM 4: Rasgele bir U_N sayısı üret, ve tU_N'yi, S kümesi ögeleri artan sırada olacak biçimde uygun yere koy.

ADIM 5: S, N tane geliş zamanını belirlemek üzere $N(t) = N$ olsun; tU_N anındaki gelişin hizmet süresini üret ve, önceki üretilmiş diğer geliş zamanlarını kullanarak, D değerini hesapla. Bunu, D_N ile göster.

ADIM 6: Eğer $N < m$ ise Adım 3'e dön. $N = m$ ise, m'yi aşmaya koşullu $N(t)$ değerini üretmek için ters dönüşüm yöntemini kullan. Üretilen değer $m + k$ ise, k tane ek rasgele sayı üret, her birini t ile çarp, ve bu k tane sayıyı S kümesine ekle. Bu k tane gelişin hizmet sürelerini üret ve önceki üretilmiş diğer geliş zamanlarını kullanarak, D değerini hesapla. Bunu, $D_{>m}$ ile göster.

Teorem

$$D[\mathcal{E}] \leqslant D[D]$$

İspat

ADIM 1: m değerini aşmaya koşullu $N(t)$'ninkiyle aynı dağılımlı rasgele bir değişkenin N' değerini,

$$O\{N' = k\} = \frac{(\lambda t)^k / k!}{\sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda t)^k / k!}, \quad k > m$$

olmak üzere, üret.

ADIM 2: Bağımsız $(0, t)$ tekdüze $A_1, \ldots, A_{N'}$ rasgele değişken değerlerini üret.

ADIM 3: Bağımsız hizmet süreleri $S_1, \ldots, S_{N'}$ rasgele değişken değerlerini üret..

ADIM 4: λt ortalamalı Poisson rasgele bir değişkenin $N(t)$ değerini üret.

ADIM 5: $N(t) = j \leqslant m$ ise, $D = D_j$ değerini hesaplamak için, $S_1, \ldots, S_{N'}$ hizmet süreleriyle birlikte $A_1, \ldots, A_j$ geliş zamanlarını kullan.

ADIM 6: $N(t) > m$ ise, $D = D_{>m}$ değerini hesaplamak için, $S_1, \ldots, S_{N'}$ hizmet süreleriyle birlikte $A_1, \ldots, A_j$ geliş zamanlarını kullan.

9.5.2 Çok-boyutlu Tekdüze İşlevlerin Tümlev Hesabı

Yani, $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ sabit değerlerine göre, $g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ işlevi her $i = 1, \ldots, n$ için x_i'de artsın. Eğer $Y = \Pi_{i=1}^{n} U_i$ olsun dersek, o zaman, hem Y hem de $g(U_1, \ldots, U_n)$'nin her ikisi de U_i'nin artan işlevleri olduğundan, $B[D[g(U_1, \ldots, U_n)]|Y]$'nin genellikle görece küçük olması beklenir. Dolayısıyla, θ'nın tahminini $\Pi_{i=1}^{n} U_i$'ye koşullayarak yapmayı düşünmeliyiz. Bunun için, önce

(a) $\Pi_{i=1}^{n} U_i$'nin olasılık dağılımını,
(b) $\Pi_{i=1}^{n} U_i$'nin belli bir aralıkta olmaya koşullu olarak nasıl üretileceğini;
(c) $\Pi_{i=1}^{n} U_i$ değerine koşullu $U_1, \ldots, U_n$ değerlerinin nasıl üretileceğini

belirlememiz gerekir.

9.5.3 Bileşik Rasgele Yöneyler

Negatif olmayan tamsayı değerli rasgele bir N değişkenin olasılık kütle işlevi

$$o(n) = O\{N = n\}$$

olsun ve N'nin, F ortak dağılım işlevine sahip bağımsız ve aynı dağılımlı $X_1, X_2, \ldots$, rasgele değişkenler ardışımından bağımsız olduğu varsayılsın. O zaman $(X_1, \ldots, X_N)$ yöneyine *bileşik rasgele bir yöney* denir. ($N = 0$ olduğunda, bileşik yöneyin boş yöney olduğu söylenir.)

9.5.4 Ard-Tabakalamanın Kullanılması

Buna bir örnek olarak, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$'nın tekdüze artan bir işlevi h olmak üzere, $\theta = B[h(X_1, \ldots, X_k)]$ değerini tahmin etmek istediğimizi düşünün. Eğer $\sum_{i=1}^{k} X_i$ dağılımı biliniyorsa, o zaman etkin olarak bu toplam üzerine ard-tabakalama yapılabilir. Böyle olduğunda aşağıdaki durumları göz önüne alalım.

9.6 Önem Örneklemesi

θ' yı benzetimle tahmin etmek için bir başka yol, $g(\mathbf{x}) = 0$ olduğunda $f(\mathbf{x}) = 0$ olacak biçimde $g(\mathbf{x})$ bir başka olasılık yoğunluk işleviyse, o zaman $\mathbf{X}$ rasgele yöneyinin $g(\mathbf{x})$ ortak yoğunluğuna sahip olduğunu vurgulamak üzere B_g yazılarak, θ' nın

$$\begin{aligned}\theta &= \int \frac{h(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= B_g\left[\frac{h(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})}\right] \qquad (9.12)\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebileceğini görmektir.

• Örnek 9t

Eğer f, o ölçümöteli bir Bernoulli kütle işleviyse, o zaman

$$f(x) = o^x (1 - o)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, $M(t) = B_f[e^{tX}] = oe^t + 1 - o$ ve

$$f_t(x) = \frac{1}{M(t)} (oe^t)^x (1 - o)^{1-x}$$

$$= \left(\frac{oe^t}{oe^t + 1 - o} \right)^x \left(\frac{1 - o}{oe^t + 1 - o} \right)^{1-x}$$

elde edilir. Yani, f_t; $o_t = (oe^t)/(oe^t + 1 - o)$ ölçümöteli bir Bernoulli rasgele değişkenidir.

Örnek 9u $X_1, \ldots, X_n$'ler sırasıyla f_i, $i = 1, \ldots, n$ yoğunluk (ya da kütle) işlevine sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. a, toplamın ortalamasından çok daha büyük olmak üzere, toplamlarının en az a kadar olma olasılığını yaklaşıklamak istediğimizi varsayın. Yani, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ve $a > \sum_{i=1}^{n} B[X_i]$ olmak üzere,

$$\theta = O\{T \geqslant a\}$$

olasılığını tahmin etmek istiyoruz. $G\{T \geqslant a\}$, $T \geqslant a$ ise, 1; değilse 0 ve $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ olmak üzere,

$$\theta = B_{\mathbf{f}}[G\{T \geqslant a\}]$$

olur.

Örnek 9v Müşteri gelişleri arasındaki ardışık sürelerin f yoğunluk işlevine ve hizmet sürelerinin g yoğunluk işlevine sahip olduğu tek-sunuculu bir kuyruğu göz önüne alalım. D_n, n'inci gelişin kuyrukta beklediği süreyi göstersin, ve a, $B[D_n]$'den çok büyük olduğunda, $a = O\{D_n \geqslant a\}$'yı tahmin etmek isteyelim. Ardışık gelişler arası ve hizmet sürelerini, sırasıyla, f ve g'ye göre üretmek yerine, belirlenecek pozitif bir sayı t olmak üzere, f_{-t} ve g_t'ye göre üretebiliriz. f ve g yerine bu dağılımlar kullanıldığında, ($-t < 0$ olduğundan) daha küçük gelişler arası ve daha büyük hizmet süreleri ile karşılaşılacağına dikkat ediniz. Dolayısıyla, f ve g yoğunluklarını kullanarak benzetim yapmaya göre, $D_n > a$ olma şansı daha büyük olacaktır. T_n, ilk n geliş süreleri toplamı; Y_n, verilen ilk hizmet süreleri toplamı ve M_f ve M_g, sırasıyla, f ve g yoğunluklarının moment üreten işlevleri olmak üzere, a'nın önem örneklem tahmin edicisi,

$$\hat{\alpha} = G\{D_n > a\}e^{t(T_n - Y_n)}[M_f(-t)M_g(t)]^n$$

olur. Kullanılacak t değeri, birkaç farklı seçenek denenerek belirlenmelidir. □

- **Örnek 9u**

$X_1, \ldots, X_N$'ler, (her biri $-\mu$ ortalamalı ve 1 değişkeli normal olan) benzetilmiş değişkenler, ve

$$G = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{N} X_i > B \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere, f_c'nin c ortalamalı ve 1 değişkeli normal yoğunluk olduğu, benzetimin bu yürütmesindeki θ'nın tahmin edicisi,

$$G \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{f_{\mu}(X_i)}{f_{-\mu}(X_i)} \right] \tag{9.13}$$

olur.

Örnek 9x X = $(X_1, \ldots, X_{100})$, (1, 2, . . . , 100)'ün rasgele bir dizilimi olsun. Yani, X seçkisiz (100)! dizilimden herhangi biridir. Benzetimle,

$$\theta = O\left\{\sum_{j=1}^{100} jX_j > 290,000\right\}$$

değerini tahmin etmek isteyelim. θ'nın büyüklüğüne ilişkin bir sezgi edinebilmek için, ortalamayı ve $\sum_{j=1}^{100} jX_j$'nın standart sapmasını hesaplamayla başlayabiliriz.

• Örnek 9y

$B_t[T] = 68.43$ olur. Buna göre, $1/(i + 2) - 0.14$, $i = 1, 2, 3, 4$ sıklıklı X_i üstel rasgele değişkenlerinin k tane kümesini üretelim, ve j'inci kümenin toplamı T_j, $j = 1, 2, 3, 4$ olsun. O zaman, $C = 81.635$ olmak üzere

$$\frac{C}{k}\sum_{j=1}^{k} T_j G(T_j > 62)e^{-0.14S_j} \quad \text{ile} \quad B[TG(T > 62)]$$

$$\frac{C}{k}\sum_{j=1}^{k} G(T_j > 62)e^{-0.14S_j} \quad \text{ile} \quad B[G(T > 62)]$$

tahmin edilebilir ve θ'nın tahmin edicisi de

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j G(T_j > 62)e^{-0.14S_j}}{\sum_{j=1}^{k} G(T_j > 62)e^{-0.14S_j}}$$

olur. $\square$

Örnek 9z Önem örneklemesi ve koşullu beklenti kimi zaman,

$$B_f[X] = B_f\left[B_f[X|Y]\right] = B_g\left[B_f[X|Y]\frac{f(X)}{g(X)}\right]$$

özdeşliği kullanılarak birleştirilebilir. Örneğin, X_1 ve X_2, 1 ortalamalı bağımsız üsteller olmak üzere, $O\{X_1 + X_2 > 10\} = B[G(X_1 + X_2) > 10]$'un tahmin etmek isteyelim. Bunu önem örneklemesi yoluyla tahmin etmek istersek, X_1 ve X_2 ortalaması 5 olan bağımsız iki üstelin yoğunluk işlevi g olmak üzere, g'ye göre X_1, X_2 üretilir ve tahmin edici

$$G\{X_1 + X_2 > 10\}\frac{e^{-(X_1+X_2)}}{\frac{1}{25}e^{-(X_1+X_2)/5}} = 25\,G\{X_1 + X_2 > 10\}e^{-\frac{4}{5}(X_1+X_2)} \leqslant 25\,e^{-8}$$

olur. Diğer yandan,

9.8 İlginç Bir Hisse Senedi Seçeneğinin Değerlendirilmesi

Şimdiki zaman 0 olarak alındığında, bir hisse senedinin y anındaki fiyatı $F(y)$ ile gösterilsin. Yaygın bir varsayım, hisse senedi fiyatının zaman boyutunda geometrik bir Browngil hareket sürecine göre evrildiğidir. Bu, y anına kadar herhangi bir fiyat geçmişi, $t + y$ anındaki fiyatın y anındaki fiyata oranı, μt ortalamalı ve $t\sigma^2$ değişkeli lognormal bir dağılım olduğu anlamına gelir. Yani, fiyat geçmişinden bağımsız olarak,

$$\log\left(\frac{F(t+y)}{F(y)}\right)$$

rasgele değişkeni, μt ortalamalı ve $t\sigma^2$ değişkeli normal bir dağılıma sahiptir. μ ve σ ölçümötelerine, sırasıyla geometrik Browngil hareketin eğilimi ve oynaklığı denir.

9.9 Ek: Tekdüze İşlevlerin Beklenen Değerini Tahmin Etmede Karşıt Değişken Yaklaşımının Doğrulanması

Teorem *$X_1, \ldots, X_n$'ler bağımsızsa, o zaman n değişkenin herhangi artan f ve g işlevleri için, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ olmak üzere,*

$$B[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})] \geqslant B[f(\mathbf{X})]\,B[g(\mathbf{X})] \tag{9.19}$$

olur.

Sonuç $h(x_1, \ldots, x_n)$ $x_1, \ldots, x_n$'lerin tekdüze bir işlevi ise, o zaman bağımsız bir $U_1, \ldots, U_n$ rasgele değişkenler kümesi için,

$$D[h(U_1, \ldots, U_n), h(1 - U_1, \ldots, 1 - U_n)] \leqslant 0$$

olur.