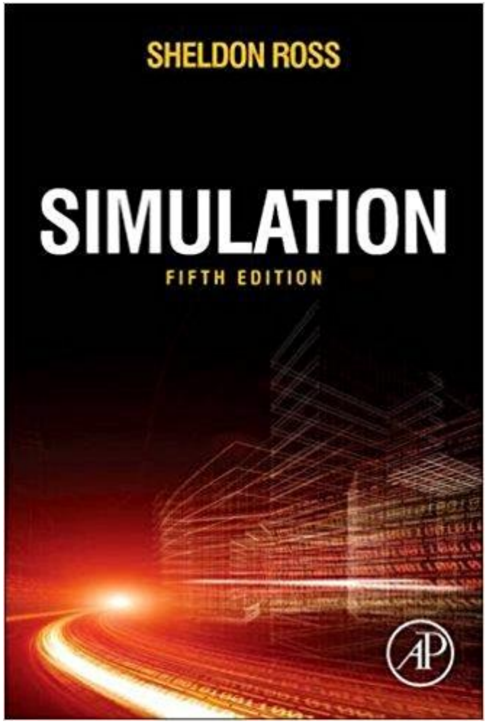
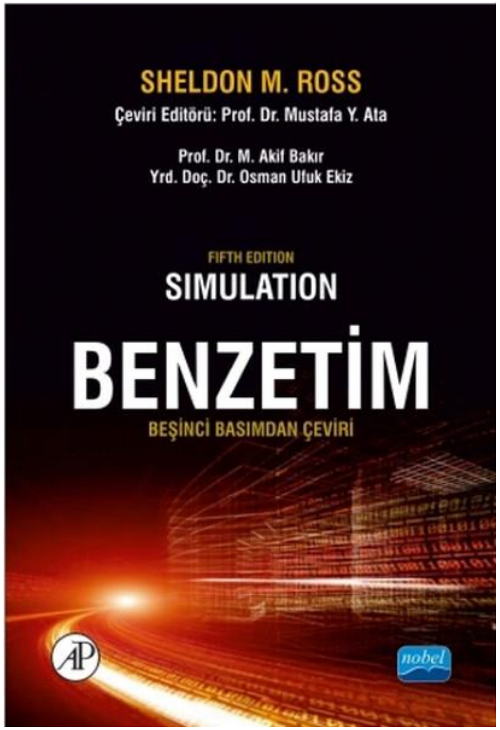
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 10
Diğer Değişke Küçültme Teknikleri

Giriş

Bu bölümde, önceki bölümde verilenler kadar standart olmayan kimi diğer değişke küçültme tekniklerini vereceğiz. Kısım 10.1, uygulanabilir olduğunda, belirli bir olaylar kümesinden en az birisinin gerçekleşme olasılığı o'nun tahmininde kullanılabilen, koşullu Bernoulli örnekleme yöntemini sunmaktadır. Yöntem özellikle o küçük olduğunda güçlüdür. Kısım 10.2 üretilecek rasgele yöney dağılımının tümüyle belirlenmemiş olduğu durumlara önem örneklemesi düşüncesini genişleten normalleştirilmiş önem örneklemesi tekniğini sunuyor. Kısım 10.3, tabaka örnekleme fikrinden esinlenen bir değişke küçültme yöntemini, Latin Hiperküp örneklemesini tanıtıyor.

10.1 Koşullu Bernoulli Örnekleme Yöntemi

Önerme

(a) $O\{I = i | X_I = 1\} = \lambda_i / \lambda$

(b) $B[SR] = \lambda B[R | X_I = 1]$

(c) $O\{S > 0\} = \lambda B\left[\frac{1}{S} | X_I = 1\right]$

$o = O(S > 0)$'ı Tahmin Etmek için Koşullu Bernoulli Örnekleme Yöntemi

$$\lambda_i = O(X_i = 1) = 1 - O(X_i = 0), \quad \lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \quad S = \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

1. $O(J = i) = \lambda_i/\lambda, i = 1, \ldots, m$ olmak üzere J'yi üret. J'nin üretilen değeri j olsun.
2. $X_j = 1$ olsun.
3. $X_j = 1$ olmak üzere, X_i, $i \neq j$ yöneyini üret.
4. $S^* = \sum_{i=1}^{m} X_i$ olsun ve λ/S^* sapmasız tahmin edicisini elde et.

Örnek 10a Kupon Toplama Problemi Varsayalım ki m tür kupon var, ve her yeni toplanan kuponun i türünde olma olasılığı o_i, $\sum_{i=1}^{m} o_i = 1$. T, kolleksiyonumuzda her türden en az bir tane oluncaya kadar topladığımız kupon sayısı olsun ve $o = O(T > k)$ olasılığı küçükken onu tahmin etmek isteyelim. N_i, $i = 1, \ldots, m$, toplanan ilk k tane kupon içinde i türündekilerin sayısını göstersin ve $X_i = I\{N_i = 0\}$ toplanan ilk k kupon arasında i türü kupon olmama olayının göstergesi olsun. Böylece, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ olmak üzere,

$$o = O(S > 0).$$

olur.

Aşağıdaki çizelge, KBÖY değişkelerini ve $o_i = i/55$, $i = 1, \ldots, 10$ olduğunda çeşitli k değerleri için $O(N > k)$'nın kaba benzetim tahmin edicisi $I = I\{N > k\}$'yı vermektedir.

k	$O(N > k)$	$D[I]$	$D[\lambda/S^*]$
50	0.54	0.25	0.026
100	0.18	0.15	0.00033
150	0.07	0.06	9×10^{-6}
200	0.03	0.03	1.6×10^{-7}

• Örnek 10b

Y_j, $j = 1, \ldots, n$, j bileşeni çalışmadığında 1'e, aksi durumda 0'a eşit olsun, ve j bileşeninin çalışmama olasılığı $p_j = O\{Y_j = 1\}$ ile gösterilsin. Şimdi, $i = 1, \ldots, m$ için,

$$X_i = \prod_{j \in C_i} Y_j$$

olsun. Yani, X_i, C_i'deki tüm bileşenlerin çalışmama olayının göstergesi olmaktadır. $S = \sum_i X_i$ olsun dersek, o zaman dizgenin çalışmama olasılığı

$$\theta = O\{S > 0\}$$

olur.

Aşağıdaki çizelge, $D[R] = \theta(1 - \theta)$ kaba benzetim tahmin edicisi olmak üzere, çeşitli p değerleri için θ ve $D[R]$'nin λ/S^* tahmin edicisinin değişkesine oranını vermektedir.

p	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{D}(\mathbf{R})/\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\lambda}/\mathbf{S}^*)$
0.001	9.985×10^{-9}	8.896×10^{10}
0.01	9.851×10^{-6}	8,958,905
0.1	0.00856	957.72
0.2	0.05792	62.59
0.3	0.16308	12.29

Böylece, küçük p için, $D[R] \approx \theta$ iken, $D[\lambda/S^*]$ kabaca θ^2 derecesinden yaklaşıktır. $\square$

Örnek 10c Bir Düzen için Bekleme Y_i, $i \geqslant 1$, $O_j = O\{Y_i = j\}$ olasılık kütle işlevli bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli rasgele değişkenlerin bir ardışımı olsun. Bu rasgele değişken değerlerinin sabit bir ardışımı $i_1, \ldots, i_k$ olsun ve

$$N = \text{enk}\{i : i \geq k, Y_{i-j} = i_{k-j}, j = 0, 1, \ldots, k-1\}$$

olarak tanımlansın.

10.2 Normalleştirilmiş Önem Örneklemesi

Uyarı Normalleştirilmiş önem örneklemesini daha önce görmüştük. Gerçekten de, $\theta = B_f[h(\mathbf{X})|\mathbf{X} \in \mathcal{A}]$'nın tahmin edicisi Eşitlik (9.14)'ü elde ederken kullanılan tekniğe denktir. Eşitlik (9.14)'teki tahmin edici g yoğunluğundan k tane rasgele yöney örnekler ve

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} h(\mathbf{X}_i) I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{A}) f(\mathbf{X}_i)/g(\mathbf{X}_i)}{\sum_{i=1}^{k} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{A}) f(\mathbf{X}_i)/g(\mathbf{X}_i)}$$

tahminini kullanır. Eğer $\mathcal{A}$ n-uzayın tümü olacak biçimde alınırsa, o zaman $I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{A}) \equiv 1$ olur, problemde $B_f[h(\mathbf{X})]$'nin tahminine dönüşür, ve yukarıdaki tahmin edici normall-leştirilmiş örnekleme tahmin edicisi olur. □

• Örnek 10d

Bu zorluğu aşmak için, Y_i, $i = 1, \ldots, r$'ler (n_i, o) ölçümöteli bağımsız iki-sanlı rasgele değişkenler olsun. $S_y \equiv \sum_{i=1}^{r} Y_i$'nin (n, o) ölçümöteli iki-sanlı olmasını kullanarak, $\sum_{j=1}^{r} i_j = m$ için,

$$O(Y_1 = i_1, \ldots, Y_r = i_r | S_y = m) = \frac{\prod_{j=1}^{r} \binom{n_j}{i_j} o^{i_j}(1-o)^{n_j - i_j}}{\binom{n}{m} o^m (1-o)^{n-m}}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{i_1}\binom{n_2}{i_2}\cdots\binom{n_r}{i_r}}{\binom{n}{m}} \qquad (10.3)$$

olduğunu görürüz.

10.3 Latin Hiperküp Örnekleme

$U_1, \ldots, U_n$'ler bağımsız tekdüze (0, 1) rasgele değişkenler ve her hangi bir işlev h olmak üzere $\theta = B[h(U_1, \ldots, U_n)]$'nin hesaplanmasında benzetimi kullanmak istediğimiz varsayılsın. Yani,

$$B[h(U_1, \ldots, U_n)] = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 h(x_1, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

değerini hesaplamak istiyoruz. Standart yaklaşım, diyelim ki r tane, bağımsız tekdüze (0, 1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_1 &= (U_{1,1}, U_{1,2}, \ldots, U_{1,j}, \ldots, U_{1,n}) \\
\mathbf{U}_2 &= (U_{2,1}, U_{2,2}, \ldots, U_{2,j}, \ldots, U_{2,n}) \\
\ldots &= \ldots \\
\mathbf{U}_i &= (U_{i,1}, U_{i,2}, \ldots, U_{i,j}, \ldots, U_{i,n}) \\
\ldots &= \ldots \\
\mathbf{U}_r &= (U_{r,1}, U_{r,2}, \ldots, U_{r,j}, \ldots, U_{r,n})
\end{aligned}$$

rasgele değişkenin n tane ardışık yöneyini üretmek, ve sonra bu yöneylerin her birinde h değerini üretip, benzetim tahmin edicisi olarak $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} h(\mathbf{U}_i)$'yi kullanmaktır.