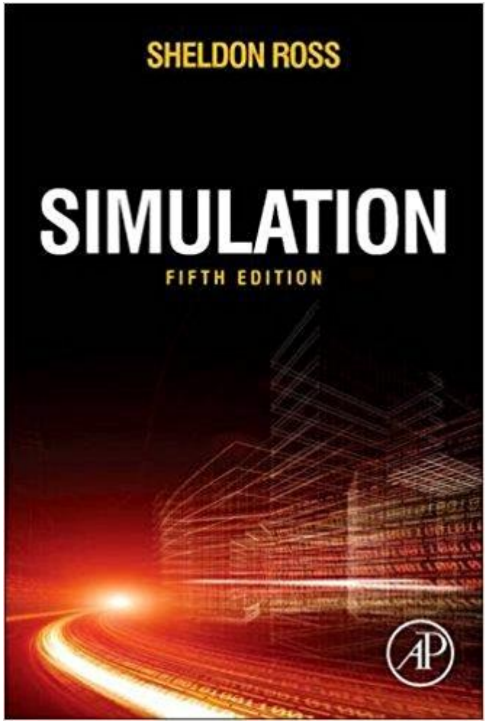
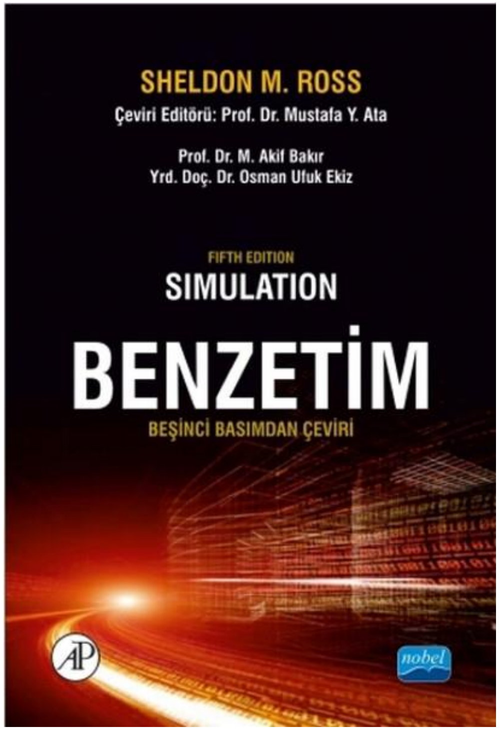
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 11
İstatistiksel Geçerlik Teknikleri

Giriş

Bu bölümde, benzetim modellerini geçerlemede kullanılan bazı istatistiksel işlemleri ele almaktayız. Kısım 11.1 ve 11.2, varsayılan olasılık dağılımının belli bir veri kümesi ile tutarlı olup olmadığını belirlemede kullanılan uyum iyiliği sınamalarını dikkate almaktadır. Kısım 11.1'de olasılık dağılımının sadece belli ölçümötelere bağlı olarak tanımlandığını varsaymaktayız —örneğin bilinmeyen ortalamaya sahip Poisson gibi. Kısım 11.3'te, iki ayrı örneklem verisinin aynı yığından geldiği savının nasıl sınanacağını göstermekteyiz—gerçek veri ve gerçeğin doğru bir temsili olduğu varsayılan matematiksel bir modelden benzetimle üretilmiş verinin aynı yığından gelmesi durumu gibi. Kısım 11.3'ün sonuçları, özellikle bir benzetim modelinin geçerliliğini sınamak için yararlıdır. Bu kısımda aynı zamanda çok sayıdaki örneklem durumu için bir genelleştirme verilmektedir. Son olarak, Kısım 11.4'te, veri üretme sürecinin türdeş-olmayan Poison sürecine sahip veri ürettiğini sınamak için gerçek verinin nasıl kullanılacağını göstereceğiz.

11.1 Uyum İyiliği Sınamaları

- Uyum iyiliği sınaması yapmanın bir yolu, öncelikle rasgele değişken değerlerini sonlu sayıda sınıflara ayırmaktır. Sonra rasgele değişkenin örneklem değerleri gözlemlenir ve her bir sınıfa düşen gözlem sayıları ile verilerin gerçekte geldiği düşünülen olasılık dağılımına göre kuramsal olarak beklenen sayılar arasında bir karşılaştırma yapılır.

- # Kesikli Veriler için Ki-Kare Uyum İyiliği Sınaması

S_0 doğru iken T'nin yaklaşık olarak k-1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olduğu biçimindeki klasik sonuç kullanılarak elde edilebilir. Böylece, k-1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı X_{k-1}^2 olmak üzere,

$$p\text{-değeri} \approx O\left\{X_{k-1}^2 \geqslant t\right\} \tag{11.1}$$

olur.

• Örnek 11a

Sınama istatistiği T'nin değeri

$$T = \frac{4 + 25 + 81 + 9 + 9}{10} = 12.8$$

ile tanımlanır. Bu ise p-değeri için

$$p\text{-değeri} \approx O\left\{X_4^2 > 12.8\right\} = 0.0122$$

sonucunu verir.

Böyle küçük bir p-değeri için, tüm sonuçların seçkisiz olduğu yolundaki sav red edilebilecektir. □

Sürekli Veri için Kolmogrov-Smirnov Sınaması

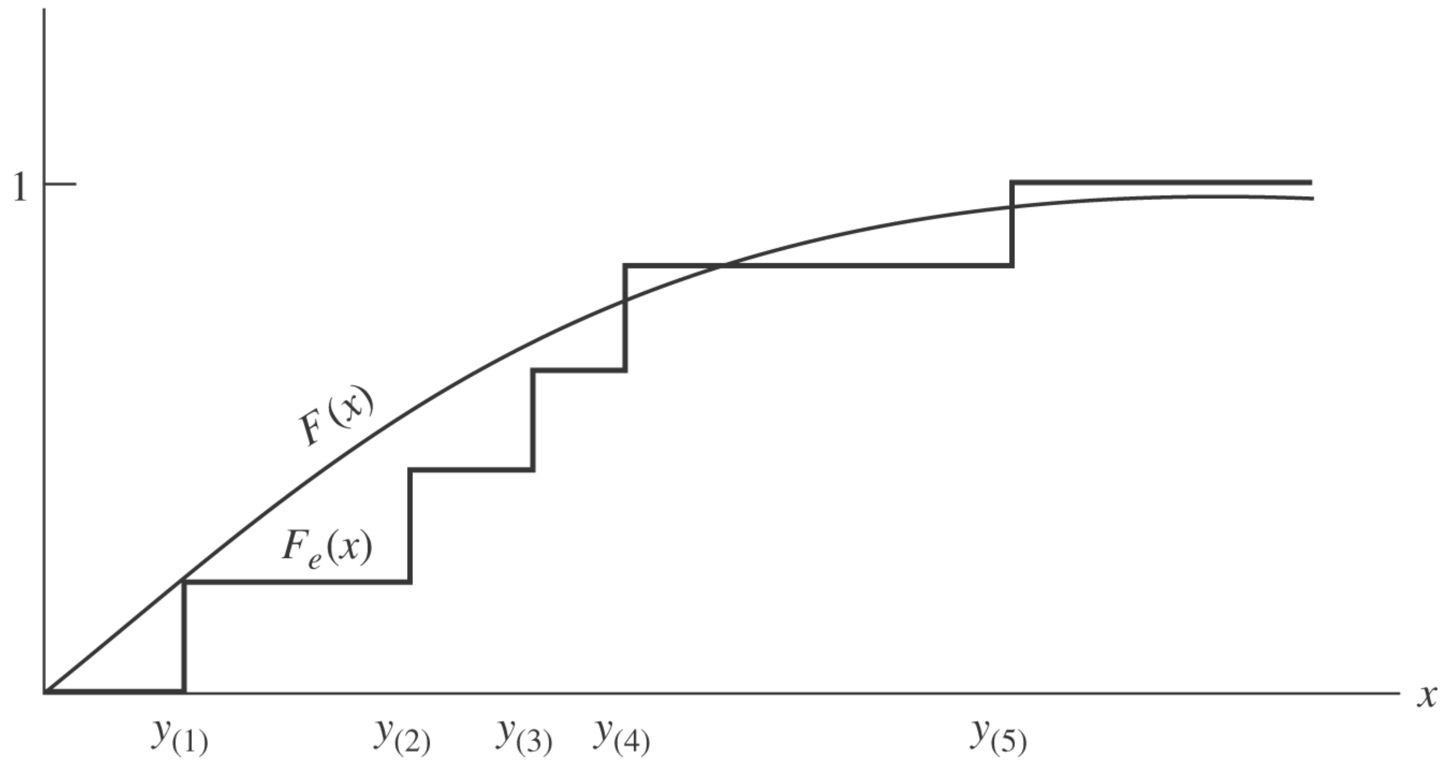
F belli bir sürekli dağılım işlevi olmak üzere, $Y_1, \ldots, Y_n$'nin bağımsız rasgele değişkenlerinin ortak dağılım işlevinin, F olduğunu öne süren S_0 yokluk savını sınamak isteyelim. S_0'ı sınamanın bir yolu Y_j'nin olası değerler kümesini

$$(y_0, y_1), (y_1, y_2), \ldots, (y_{k-1}, y_k), \qquad y_0 = -\infty,\ y_k = +\infty$$

biçimde k farklı aralığa ayırmak, ve sonra

$$Y_j^d = i \quad \text{eğer} \quad Y_j \text{ aralığındaysa} \quad (y_{i-1}, y_i)$$

biçiminde kesikleştirilmiş $Y_j^d, j = 1, \ldots, n$ rasgele değişkenlerini dikkate almaktır.



Şekil 11.1. $n = 5$

Önerme *Herhangi sürekli bir F dağılımı için $O_F\{D \geqslant d\}$ aynıdır.*

Örnek 11b Yığının ortalaması 100 olan üstel dağılıma sahip olduğu, yani $F(x) = 1 - e^{-x/100}$, savını sınamak istediğimizi varsayalım. Bu dağılımdan çekilen 10 çaplı örneklemin (sıralı) değerleri

$$66,\ 72,\ 81,\ 94,\ 112,\ 116,\ 124,\ 140,\ 145,\ 155$$

ise, ne sonuç çıkarılabilir?

11.2 Bazı Ölçümöteler Tanımlanmadığında Uyum İyiliği Sınamaları

Kesikli Veri Durumu

Örneğin, ilgilenilen coğrafi bölge küçükse ve böylece bir gündeki kaza sayısı çok fazla değilse, belli bir günde $i-1$ kaza varken bölge i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$'ye, 5 ya da daha fazla kaza varsa bölge 6'ya düştüğünü söyleyebiliriz. Böylece, öngörülen dağılım gerçekten λ ortalamayla Poisson'sa, bu durumda olasılıklar

$$o_i = O\{Y = i - 1\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$o_6 = 1 - \sum_{j=0}^{4} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!} \tag{11.6}$$

olur.

Örnek 11c 30 günlük dönem boyunca, hiç kaza olmayan 6 gün; 1 kaza olan 2 gün; 3 kaza olan 9 gün; 4 kaza olan 7 gün; 5 kaza olan 4 gün ve 8 kaza olan 1 gün bulunduğunu varsayalım. Bu verilerin yokluk savında belirtilen Poisson dağılımıyla tutarlı olup olmadığını sınamak için Poisson dağılımının ortalamasının tahmini toplam 87 kaza olduğunu dikkate alarak

$$\hat{\lambda} = \frac{87}{30} = 2.9$$

olarak bulunur.

Örnek 11d Örnek 11c'yi yeniden ele alalım. Bu örnekteki verilerden $\hat{\lambda} = 2.9$ ve $T = 19.887$olarak tahmin edilmişti. Şimdi benzetim adımı her biri $\hat{\lambda} = 2.9$ olan 30 bağımsız rasgele değişken üretmekten ve X_i, 30 değerden i bölgesine düşenlerin sayısını ve o_i^* üretilen 30 değerin ortalamasına eşit ortalamalı Poisson rasgele bir değişken değerinin i bölgesinde olma olasılığını göstermek üzere,

$$T^* \equiv \sum_{i=1}^{6} \frac{(N_i - 30\,o_i^*)^2}{30\,o_i^*}$$

değerini hesaplamaktan oluşur. Bu benzetim adımı birçok kez yinelendikten sonra, en az 19.887 kadar büyük olan T_i^*'lerin oranı tahmin edilen p-değeri olur. □

Sürekli Veri Durumu

ADIM 1: $\boldsymbol{\theta}$'yı, diyelim ki, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ile tahmin etmek için eldeki verileri kullanın. D'nin değerini yukarıda tanımlandığı gibi hesaplayın.

ADIM 2: Tüm benzetimler $F_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ dağılımını kullanarak yapılmalıdır. Bu dağılımdan n büyüklüğünde bir örneklem üretin ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}$(b) bu benzetim işletiminden elde edilen tahmin olmak üzere

$$\underset{x}{\text{enb}}\,|F_{e,b}(x) - F_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(b)}(x)|$$

değerini hesaplayın.

11.3 İki-Örneklem Problemi

Örnek 11e 5 gün boyunca bir dizgenin gözlenmesiyle elde edilen ardışık değerlerin

$$342,\ 448,\ 504,\ 361,\ 453$$

olduğunu, bu dizge için önerilen matematiksel modelin 10 gün için benzetimiyle elde edilen değerlerin ise

$$186,\ 220,\ 225,\ 456,\ 276,\ 199,\ 371,\ 426,\ 242,\ 311$$

olduğunu varsayalım. Birinci veri kümesindeki 5 veri değeri 8, 12, 15, 9, 13 olduğundan sınama istatistiğinin değeri $R = 57$ olarak hesaplanır.

Örnek 11f Bir dizgenin 5 günlük gözlemi belli bir değişkene ilişkin aşağıdaki değerleri vermiştir.

$$132,\ 104,\ 162,\ 171,\ 129$$

Bu dizgenin önerilen bir modelin 10 günlük bir benzetimi

$$107,\ 94,\ 136,\ 99,\ 114,\ 122,\ 108,\ 130,\ 106,\ 88$$

değerlerini vermiştir.

Önerilen modelin, bu günlük değerlerin bağımsız ve ortak bir dağılıma sahip olmasını gerektirdiği varsayılsın. Yukarıdaki verilerden elde edilecek p-değerini belirlemek için, önce birinci örneğin sıra sayıları toplamının

$$R = 12 + 4 + 14 + 15 + 10 = 55$$

olduğunu bilelim.

(11.8) özyinelemeli eşitliğini kullanan bir program aşağıdaki çıktıyı vermiştir.

Örnek 11g Klasik yaklaşımın Örnek 11f'nin verileri için ne derece iyi çalıştığını görelim. Bu durumda, $n = 5$ ve $m = 10$ olduğundan, tam değeri 0.075 olan p-değerini

$$\begin{aligned} p\text{-değeri} &= 2\ P_{H_0}\{R \geqslant 55\} \\ &\approx 2\ P\left\{Z \geqslant \frac{55-40}{\sqrt{\frac{50\times 16}{12}}}\right\} \\ &= 2\ P\{Z \geqslant 1.8371\} \\ &= 0.066 \end{aligned}$$

olarak buluruz. □

11.4 Türdeş-olmayan Poisson Varsayımının Doğrulanması

S_0: N_i'ler aynı ortalamaya sahip rasgele Poisson değişkenlerdir savının sınamasını

$$T = \frac{S^2}{\overline{N}} \tag{11.10}$$

sınama istatistiğine dayandırırız. T'nin çok küçük ya da çok büyük değerleri S_0 ile uyumsuz olabileceğinden, $T = t$ değeri için p-değeri

$$p\text{-değeri} = 2\,\text{enk}\,(O_{S_0}\{T \leqslant t\}, O_{S_0}\{T \geqslant t\})$$

olarak hesaplanır.

Örnek 11h Bir fabrikaya yapılan teslimat zamanları 5 gün boyunca kaydedilmiştir. Bu süre boyunca günlük teslimat sayıları aşağıdaki gibidir:

18, 24, 16, 19, 25

Ayrıca, bu 102 teslimat ulaştıkları zamana göre sıralandığında, günlere göre teslimatın sıra sayıları toplamları şöyledir.

1010, 960, 1180, 985, 1118

Yukarıdaki veriyi kullanarak, dağıtımların günlük varış süreçlerinin türdeş-olmayan Poisson bir süreci olduğu savını sınayalım.