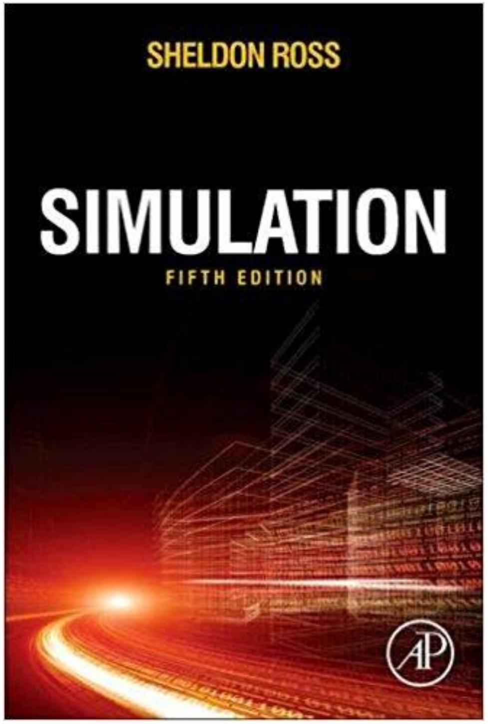
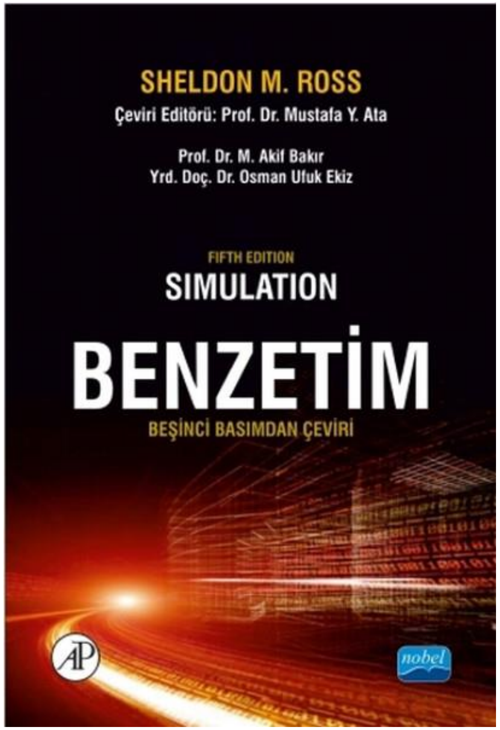
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 12
MARKOV ZİNCİRLİ MONTE CARLO YÖNTEMLER

Giriş

Genellikle, bileşenleri bağımlı rasgele değişkenler olan bir **X** rasgele yöneyinin değerlerinin benzetimi çok zordur. Bu bölümde dağılımı yaklaşık olarak **X**'in dağılımı olan bir yöneyin üretiminde güçlü bir yaklaşımı sunacağız. Markov zincirli Monte Carlo yöntem olarak adlandırılan ve **X**'in kütle (ya da yoğunluk) işlevinin yalnızca belli çarpımsal bir sabite kadar belirlenmesini gerektiren bu yöntemin uygulamada büyük önemi vardır.

12.1 Markov Zincirleri

- **Uyarı**

$\{\pi_j\}$'lere genellikle Markov zincirinin *durağan olasılıkları* denir. Markov zincirinin başlangıç konağı $\{\pi_j\}$'ye göre dağılmışsa, o zaman tüm n ve j'ler için $O\{X_n = j\} = \pi_j$ olur (bk. Alıştırma 1).

Markov zincirlerinin önemli bir özelliği, konak uzayı üzerindeki her hangi bir h işlevi için, 1 olasılıkla,

$$\underset{n\to\infty}{\text{erey}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \sum_{j=1}^{N} \pi_j h(j) \tag{12.2}$$

olmasıdır.

Tanım *İndirgenemez bir Markov zinciri, eğer her hangi* $n \geqslant 0$ *ve* j *konağı için*

$$O\{X_n = j | X_0 = j\} > 0 \qquad ve \qquad O\{X_{n+1} = j | X_0 = j\} > 0$$

koşularını sağlıyorsa, periyodik değildir denir.

12.2 Hastings-Metropolis Algoritması

Şimdi, eğer

$$\pi(i)q(i,j)\alpha(i,j) = \pi(j)q(j,i)\alpha(j,i)$$

$$\pi(i)O_{i,j} = \pi(j)O_{j,i} \qquad j \neq i$$

ise, bu Markov zinciri zaman-tersinir ve $\pi(j)$'ler de durağan olasılıkları olacaktır.

Şimdi,

$$\alpha(i,j) = \text{enk}\left(\frac{\pi(j)q(j,i)}{\pi(i)q(i,j)}, 1\right) = \text{enk}\left(\frac{b(j)q(j,i)}{b(i)q(i,j)}, 1\right) \qquad (12.3)$$

olarak alınırsa, bunun sağlandığını görmek kolaydır. [Bunun için, $\alpha(i,j) = \pi(j)q(j,i)/\pi(i)q(i,j)$ ise $\alpha(j,i) = 1$ olduğuna dikkat ediniz.]

Örnek 12a Karmaşık ve büyük bir "birleşimgil" ℓ kümesinden rasgele bir birey üretmek istediğimizi düşünelim. Örneğin ℓ, verilen sabit bir a için $\sum_{j=1}^{n} jx_j > a$ olan $(1, \ldots, n)$ sayılarının tüm $(x_1, \ldots, x_n)$ dizilimlerinin kümesi; ya da belli bir çizgenin her hangi i ve j kavşak noktası için i'den j'ye tek yolun bulunduğu tüm alt çizgeler kümesi olabilir (böyle alt çizgeler ağaç olarak adlandırılır).

12.3 Gibbs Örneklemcisi

Örnek 12b Merkezi kökende olan 1 yarıçaplı bir dairenin içinde, hiçbirinin diğer her hangi birine d uzaklığından daha yakın olmaması koşuluyla, ve

$$\beta = P\{\text{herhangi iki noktanın birbirine } d\text{'den daha yakın olmaması}\}$$

pozitif küçük bir sayı olmak üzere n tane rasgele nokta üretmek istediğimizi düşünelim.

Örnek 12c Kuyruk Ağları r kişinin $m+1$ tane kuyruk arasında dolaştığını düşünelim, ve i kuyruğunda t anındaki kişilerin sayısı $X_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ olsun. Eğer,

$$o(n_1, \ldots, n_m) = \underset{t\to\infty}{\text{erey}}\, O\{X_i(t) = n_i, i = 1, \ldots, m\}$$

ise, hizmet sürelerinin üstel dağılımlı olduğu varsayılarak, her $i = 1, \ldots, m$ için olasılık kütle işlevi $O_i(n)$, $n \geq 0$ olmak üzere, genellikle

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \leq r \quad \text{ise,} \quad o(n_1, \ldots, n_m) = C \prod_{i=1}^{m} O_i(n_i)$$

olduğu kabul edilebilir. Böyle bir olasılık kütle işlevinin *çarpım biçimli* olduğu söylenir.

Örnek 12d

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > c \text{ iken, olasılık yoğunluk işlevi,} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{O\{S > c\}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}$$

olan rasgele bir yöneyin değerini üretmek istiyoruz.

Örnek 12e Örnek 12d'deki kuyruk ağı modelinde i sunucusundaki hizmet sürelerinin μ_i, $i = 1, \ldots, m+1$ sıklıklı üstel olduğunu ve bir müşteriye i sunucusundaki hizmet tamamlandıktan sonra, diğer her şeyden bağımsız olarak, $\sum_{j=1}^{m+1} O_{ij} = 1$ olmak üzere, O_{ij} olasılığıyla j sunucusundaki kuyruğa (ya da sunucu boştaysa hizmete) girdiğini varsayalım. O zaman, $1, \ldots, m$ sunucularındaki müşteri sayısının eren olasılık kütle işlevinin, π_j, $j = 1, \ldots, m + 1$'ler O_{ij} geçiş olasılıklı Markov zincirinin durağan olasılıkları olmak üzere, $\sum_{j=1}^{m} n_j \leq r$ için,

$$o(n_1, \ldots, n_m) = C \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\pi_j \mu_{m+1}}{\pi_{m+1} \mu_j} \right)^{n_j}$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 12f $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dizilimleri sayısının $n!$'ye göre çok küçük olacağı $t(x) = \sum_{j=1}^{n} j x_j > a$ için tahmin edilmek istendiğini düşünelim. Eğer $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, seçkisiz $n!$ tane dizilimden her hangi biri ve

$$\alpha = O\{T(\boldsymbol{X}) > a\}$$

olarak alınırsa, α küçük ve istenen değer $\alpha n!$ olur. $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = a$ alınarak

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k} O\{T(\boldsymbol{X}) > a_i | T(\boldsymbol{X}) > a_{i-1}\}$$

yapılır.

Örnek 12g Her hangi bir negatif olmayan $h(y, z)$ işlevi için negatif olmayan X, Y ve Z rasgele değişkenlerinin ortak yoğunluğunun,

$$f(x, y, z) = Cx^{y-1}(1-x)^{zy}h(y, z), \qquad 0 < x < 0.5$$

olduğunu varsayalım. O zaman, $Y = y$ ve $Z = z$ verilmişken X'in koşullu yoğunluğu,

$$f(x|y, z) = \frac{f(x, y, z)}{f_{Y,Z}(y, z)}$$

olur.

Örnek 12h Bir beyzbol sezonunun ilk yüzde $100t$'sinde beyzbol oyuncusu AB'nin kaleye koşu vuruşları sayısı $N_1(t), 0 \leq t \leq 1$; benzer biçimde CD'nin vuruş sayısı $N_2(t)$ olsun.

W_1 ve W_2 rasgele değişkenlerinin olduğunu düşünelim, öyle ki $W_1 = w_1$ ve $W_2 = w_2$ verilmişken $\{N_1(t), 0 \leq t \leq 1\}$ ve $\{N_2(t), 0 \leq t \leq 1\}$'nin sırasıyla w_1 ve w_2 sıklıklı birbirinden bağımsız Poisson süreçler olsun. Ayrıca, W_1 ve W_2'nin, Y sıklıklı üstel rasgele değişkenler ve Y'nin kendisinin de 0.02 ve 0.10 aralığında tekdüze dağılımlı rasgele bir değişken olduğunu varsayalım. Başka bir deyişle varsayım, oyuncuların kale koşuları vuruşunu, kendisi belli dağılımlı bir rasgele değişken olan bir ölçümöte cinsinden tanımlı dağılımdan rasgele sıklıklı Poisson süreçlere göre yaptıkları yolundadır.

Varsayalım ki, sezonun ilk yarısında AB 25 vuruş ve CD 18 kale koşusu yapmış olsun. Tüm sezonda her birinin ortalama vuruş sayısını tahmin etmek için bir yöntem veriniz.

Örnek 12i X_i, i ortalamalı olmak üzere, $X_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$'ler bir birinden bağımsız üstel rasgele değişkenler olsun ve benzetim yoluyla,

$$\beta = B\left\{\prod_{i=1}^{5} X_i > 120 \middle| \sum_{i=1}^{5} X_i = 15\right\}$$

değerini tahmin etmek istediğimizi düşünelim.

Örnek 12j Her biri, $o_1,\ o_2, \ldots,\ o_r,\ \sum_{i=1}^{r} o_i = 1$ olasılıkla $1, 2, \ldots, r$ konağından biriyle sonuçlanan bir birinden bağımsız n deneme yapıldığını varsayalım ve i konağıyla sonuçlanan deneme sayısı X_i ile gösterilsin. Ortak dağılımı çok-sanlı dağılım olarak adlandırılan $X_1, \ldots, X_r$ rasgele değişkenleri, benzetimlerinin nasıl yapılacağının gösterildiği Örnek 12g'de tanıtılmıştı. Şimdi $n > r$ olduğunu ve tümünün pozitif olma olayına koşullu olarak benzetimini yapmak istediğimizi düşünelim. Öyle ki, her sonucun en az bir kere oluşma olayına koşullu deneme sonuçlarının benzetimini yapmak istiyoruz. Bu koşullama olayı olasılığı çok küçük olduğunda, etkin olarak bu nasıl yapılır?