2. AKIŞKAN STATİĞİ

2.6. Düzlemsel Yüzeylere Etkiyen Hidrostatik Kuvvet

Yatay bir düzleme bir akışkanın uyguladığı kuvvet F_R= P.A bağıntısıyla bulunur. Burada;

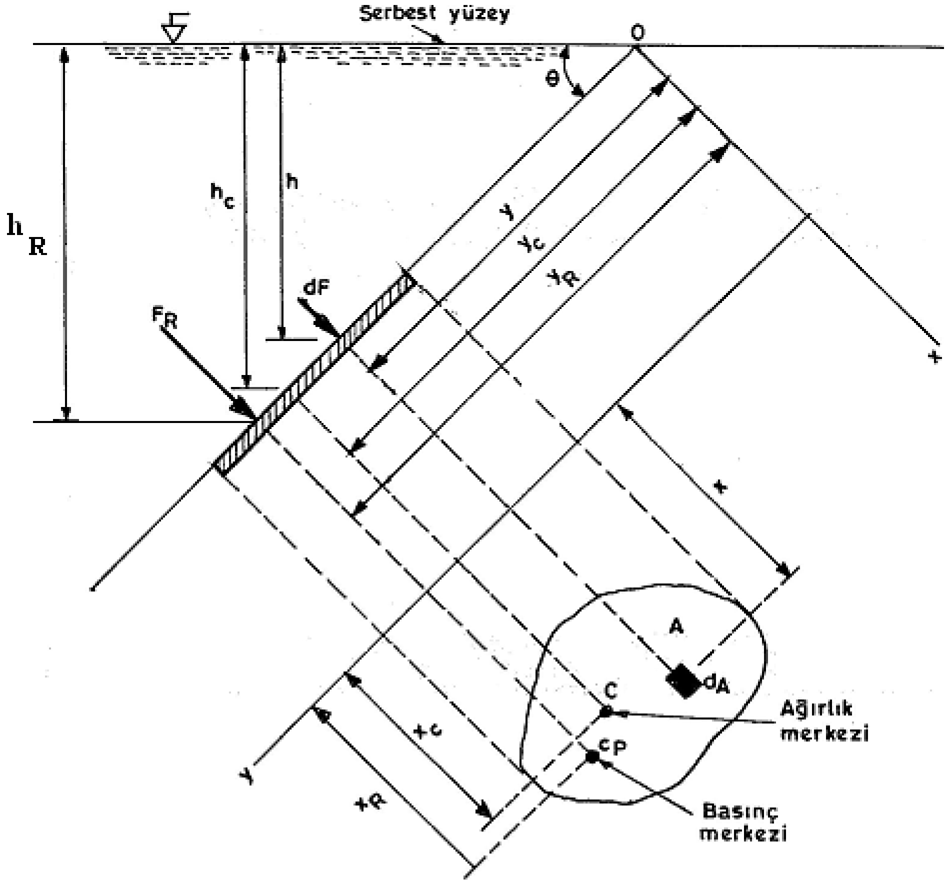
F_R : Yatay düzleme uygulanan hidrostatik kuvvet (N),
P : Yatay yüzeye akışkanın uyguladığı basınç (Pa),
A : Yatay düzlemin alanı (m^2)'dır.

Hidrostatik kuvvetin etkidiği noktaya ***basınç merkezi*** denir. Yatay düzlemde ağırlık merkezi ile basınç merkezi birbiriyle çakışıktır. Hidrostatik kuvvetin ağırlık merkezine göre belirlenmesi istendiğinde düzlemsel yüzeylerde genel bir formül verilebilmektedir (Streeter ve Wylie 1983, Munson vd. 1994, White 2012).

$$F_R = \gamma \,.\, h_c \,.\, A$$

Bu bağıntıda;
F_R : Bileşke hidrostatik kuvvet (N),
γ : Sıvının özgül ağırlığı (N/m^3),
h_c : Ağırlık merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan düşey uzaklığı (m),
A : Yüzey alanı (m^2)'dir.

Yatay düzlemin dışındaki dik ve eğimli yüzeylerde basınç merkezi ağırlık merkezinin altındadır (Şekil 2.11). Basınç merkezinin yeri (y_R ve x_R) aşağıdaki formüllerle bulunabilir (Giles 1980).



Şekil 2.11. Eğimli yüzeyde basınç kuvveti ve konumu (Giles 1980; Munson vd. 1994)

$$y_R = \frac{Ixc}{y_c.A} + y_c$$

$$x_R = \frac{Ixyc}{y_c.A} + x_c$$

Bu eşitliklerde;

y_R : Basınç merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığı (m),
x_R : Basınç merkezinin y koordinatına olan yatay uzaklığı (m),
Ixc : Cismin ağırlık merkezinden geçen ve x eksenine paralel olan eksene göre alanın ikinci momentidir (m^4),
Ixyc: Çarpım atalet momenti ya da ağırlık merkezinden geçen bir ortagonal koordinat sisteminin atalet momenti ile x-y koordinat sisteminin meydana getirdiği atalet momentinin çarpımıdır (m^4),
y_c : Ağırlık merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığı (m),
A : Basıncın etkidiği cismin yüzey alanı (m^2),
x_c : Ağırlık merkezinin y koordinatına olan uzaklığı (m)'dir.

Şekil 2.12'de gösterilen geometrik Şekillerin bazı özellikleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Douglas 1986a, Munson vd. 1994, Bar-Meir 2011).

Dikdörtgen (a)

A= b. a

$$Ixc = \frac{1}{12}.b.a^3$$

$$Iyc = \frac{1}{12}.a.b^3$$

Ixyc= 0

Daire (b)

A= π.R^2

$$Ixc = Iyc = \frac{\pi.R^4}{4}$$

Ixyc= 0

Yarım daire (c)

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

Ixc= 0,1098R^4

Iyc= 0,3927R^4

Ixyc= 0

Üçgen (d)

$$A = \frac{a.b}{2}$$

$$Ixc = \frac{b.a^3}{36}$$

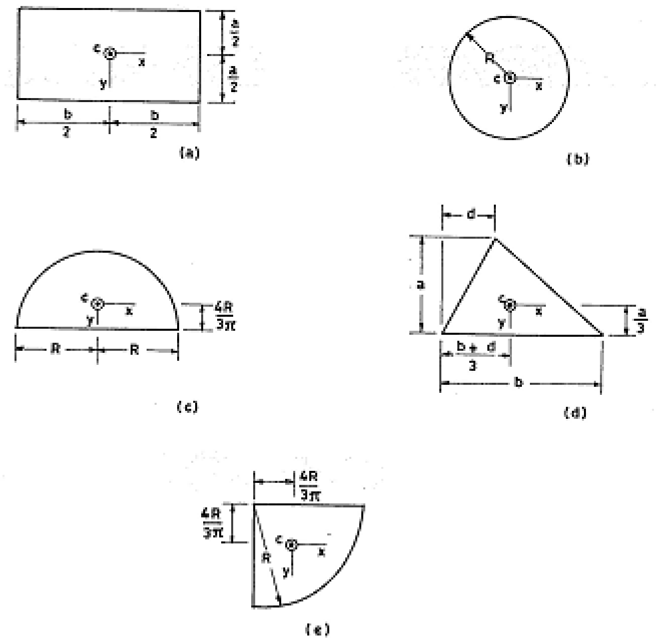
$$Ixyc = \frac{b.a^2}{72}.(b - 2d)$$

Çeyrek daire (e)

$$A = \frac{\pi.R^2}{4}$$

Ixc= Iyc= 0,05488R^4

Ixyc= -0,01647R^4



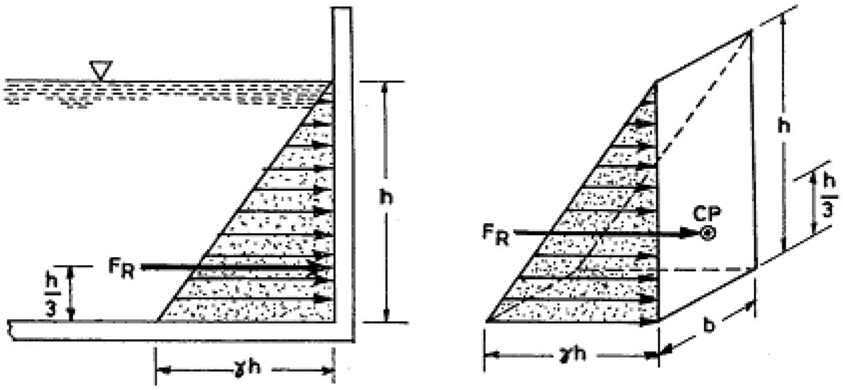
Şekil 2.12. Bazı geometrik Şekiller ve özellikleri (a: dikdörtgen, b: daire, c: yarım daire, d: üçgen, e: çeyrek daire) (Douglas 1986a, Munson vd. 1994, Bar-Meir 2011).

Düzlemsel yüzeylere etkiyen hidrostatik kuvvetin bulunmasında yararlı ve etkili bir sistem olan basınç prizması, serbest sıvı yüzeyinden başlanarak aşağıya inildikçe basınç artışının diyagramla gösterilmesi esasına dayanır. Bu yöntemde basınç dağılımıyla ortaya çıkan basınç prizmasının hacmi hidrostatik kuvvete eşittir. Örneğin dikdörtgen şeklindeki bir yüzey serbest sıvı yüzeyinden başlıyorsa bu dikdörtgen yüzeye etkiyen hidrostatik kuvvet Şekil 2.13'den yararlanılarak şu Şekilde yazılabilir (Ayyıldız 1984).

Üçgen prizmanın hacmi = $F_R = \frac{1}{2}(\gamma.h).(b.h) = \gamma.\left(\frac{h}{2}\right).A$

Burada;

F_R : Hidrostatik kuvvet (N),
γ : Sıvı akışkanın özgül ağırlığı (N/m^3),
h : Basınç prizmasının ya da dikdörtgen cismin serbest sıvı yüzeyinden olan düşey uzaklığı (m),
b : Dikdörtgen cismin genişliği (m),
A : Dikdörtgen yüzeyin alanı (m^2)'dir.



Şekil 2.13. Düşey dikdörtgen yüzeydeki basınç prizması (Munson vd. 1994)

Eğer dikdörtgenin üst kısmı serbest sıvı yüzeyinden aşağıdaysa Şekil 2.14'deki gibi basınç prizması elde edilir. Bu basınç prizması bir yamuktur ve yamuğun hacmi kuvveti vermektedir (Ayyıldız 1984).

Yamuğun hacmi= $F_R = \left(\frac{\gamma.h_1 + \gamma.h_2}{2}\right).b.h$

Üçgen basınç prizmasında bileşke kuvvetin uygulanma noktası yani basınç merkezi basınç prizmasının merkezinden geçmektedir. Bu da üçgenin tabanından h/3 ve tepesinden 2h/3 uzaklığındadır (Edis 1972). Yamuk basınç prizmasında kuvvetin etkidiği nokta (y_A) A noktasına göre moment alarak bulunabilir (Edis 1972, Ayyıldız 1984).

$F_R \cdot y_A = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$

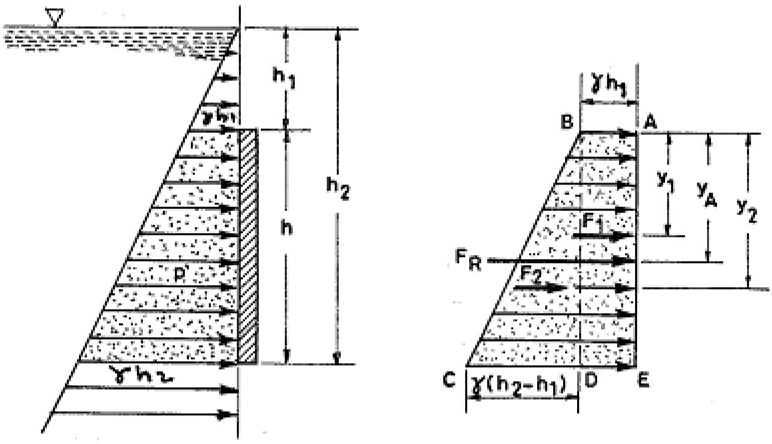
$$y_A = \frac{F_1.y_1 + F_2.y_2}{F_R}$$

$F_1 = \gamma.h_1.h.b$ $\qquad y_1 = \frac{h}{2}$

$F_2 = \gamma.h.\frac{h}{2}.b$ $\qquad y_2 = \frac{2}{3}h$ ise

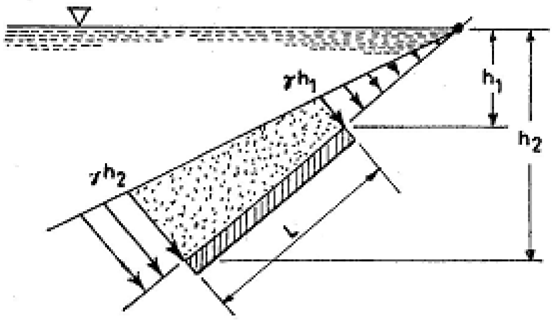
$$y_A = \frac{\gamma.h_1.\frac{h^2}{2}.b + \gamma.\frac{h^3}{3}.b}{\frac{1}{2}.\gamma(h_1 + h_2).h.b}$$

yazılabilir.



Şekil 2.14. Serbest sıvı yüzeyinden aşağıdaki dikdörtgen yüzeyin basınç prizması (Munson vd. 1994)

Yine serbest sıvı yüzeyinden aşağıda, ancak eğimli olan bir dikdörtgen yüzeye gelen basınç kuvvetini bulalım. Şekil 2.15'te eğimli yüzeye gelen basınç dağılımı gösterilmiştir. Bu cisimdeki hidrostatik kuvvet, oluşan yamuk basınç prizmasının hacmidir (Ayyıldız 1984).



Şekil 2.15. Eğimli dikdörtgen yüzeyin basınç dağılımı (Edis 1972).

$$F_R = \left(\frac{\gamma.h_1 + \gamma.h_2}{2} \right).L.b$$

2.7. Eğrisel Yüzeylere Etkiyen Hidrostatik Kuvvet

Eğrisel yüzeylere etkiyen hidrostatik kuvvet; akışkanın dengesi prensibine dayanarak, akışkanın içinde bir hacim veya bölge katılaştırılarak yani katı cisim kabul edilerek bu hacme etki eden kuvvetlerin her yöndeki cebirsel toplamları dengede oldukları için, sıfıra eşitleyerek hesaplanmaktadır. Şekil 2.16'daki BC yüzeyine gelen kuvvet aşağıdaki gibi bulunur (Munson vd. 1994).

$F_H = F_2$

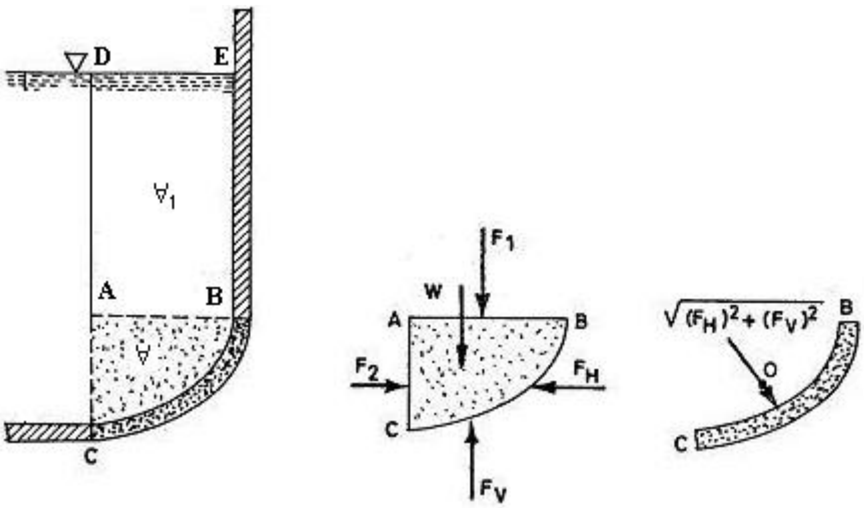
$F_V = F_1 + W$

$F_R = ((F_H)^2 + (F_V)^2)^{1/2}$

Burada;

F_H : Yatay bileşke kuvveti (N),
F_2 : Sıvının eğik yüzeye uyguladığı yatay kuvvet (N),
F_V : Düşey bileşke kuvveti (N),
F_1 : Sıvının eğik yüzeye uyguladığı düşey kuvvet (N),
W : Eğik yüzey üzerindeki sıvının ağırlığı (N),
F_R : Eğik yüzeye etkiyen hidrostatik kuvvet (N).

Bileşke hidrostatik kuvvet (F_R), Şekil 2.16'daki (0) noktasına etkir ve bu nokta belli bir noktaya moment alınarak bulunur. Burada; F_2 kuvveti düzlemsel yüzeylere gelen kuvvetler gibi hesaplanır. Yani $F_2 = \gamma . h_c . A = \gamma(AD + \frac{AC}{2})A$'dır. Eğrisel yüzey üzerindeki F_1 kuvveti ise $F_1 = \gamma . \forall_1$ ile bulunur. Bu formüldeki $\forall_1$: eğik yüzey üzerindeki sıvının hacmidir. Eğik yüzeydeki sıvının ağırlığı, hacmi $\forall$ ise $W = \gamma . \forall$ ile hesaplanır (Munson vd. 1994, Hewakandamby 2012).



Şekil 2.16. Eğrisel yüzeye gelen hidrostatik kuvvet (Munson vd. 1994, Hewakandamby 2012)

Akışkan, eğrisel yüzeyin altında ise F_2 yatay kuvveti yine düşey düzlemde eğrisel yüzeyin projeksiyon alanına etkiyen bileşke basınç kuvvetidir. Düşey kuvvetler (W ve F_1) ise yukarıda bahsedildiği gibi eğrisel yüzeyin üzerindeki sıvının ağırlığına eşittir. Sonuç olarak sıvı eğrisel yüzeyin altında ya da sağında ise meydana gelen bileşke kuvvet, sıvının eğrisel yüzeyin solundaki bileşke kuvvetin hesaplandığı gibi hesaplanır. Ancak kuvvetlerin yönleri ters olur.

2.8. Kaldırma Kuvveti

Batmış ya da yüzen bir cisme, akışkan tarafından uygulanan yukarı yönlü kuvvete kaldırma kuvveti denir ve yalnızca akışkanın özgül ağırlığıyla cismin batan hacminin çarpımına eşittir. Kaldırma kuvveti; cismin sıvı içindeki derinliğine, sıvının azlığına ya da çokluğuna ve hacimleri eşit ise cismin şekline bağlı değildir. Kaldırma kuvveti aşağıdaki gibi formülize edilebilir (Streeter ve Wylie 1983).

$$F_B = \gamma \ . \ \forall$$

F_B : Kaldırma kuvveti (N),
$\forall$: Cismin batan kısmının hacmi (m^3),
γ : Akışkanın özgül ağırlığı (N/m^3)'dır.

Kaldırma kuvvetini; cisim tarafından yer değiştirilen akışkan hacminin ağırlığı ya da cismin taşırdığı sıvının ağırlığı olarak da tanımlayabiliriz. Dalmış bir cisme etki eden kaldırma kuvvetinin uygulama noktası daima cismin hacim merkezi(sentroid)dir. Bu nedenle dalmış cisimlerde hacim merkezi aynı zamanda ağırlık merkezi olmaktadır. Yüzen cisimlerde ise kaldırma kuvveti, cismin dalmış kısmının hacim merkezinden geçmektedir. Ancak cismin hacim merkezi ağırlık merkezi olmamaktadır. Cismin havadaki ağırlığı ile sıvıdaki ağırlığı arasındaki fark kaldırma kuvvetine eşittir ($F_B = W_h - W_s$). Sıvının kaldırma kuvveti, cismin ağırlığından büyük ise, cisim su üzerinde yüzer ($F_B >$ W_{cis} ya da $\gamma_{sıvı} > \gamma_{cis}$). Sıvının kaldırma kuvveti ile cismin ağırlığı birbirine eşit ise, cisim sıvı içinde bırakıldığı yerde askıda kalır (($F_B = W_{cis}$ ya da $\gamma_{sıvı} = \gamma_{cis}$). Sıvının kaldırma kuvveti cismin ağırlığından küçük ise, cisim dibe batar (($F_B <$ W_{cis} ya da $\gamma_{sıvı} < \gamma_{cis}$). Yüzen ve sıvı içinde ağırlıksız dengede olan cisimler için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

Cismin ağırlığı=Yeri değişen (taşan) sıvının ağırlığı=Sıvının kaldırma kuvveti

Hava ortamında cisimlere hava tarafından bir kaldırma kuvveti uygulanır. Bu kaldırma kuvvetinin değeri cismin hacmi kadar hacimdeki havanın ağırlığına eşittir. Bu nedenle bir cismin havadaki ağırlığı, gerçek ağırlığından havanın kaldırma kuvveti kadar daha azdır. Bu kaldırma kuvveti nedeniyle hidrojen gibi havadan hafif olan gazlarla doldurulmuş bir balon havada yükselir.

-Cismin ağırlığı havanın kaldırma kuvvetinden büyükse o cisim yere düşer.

- Cismin ağırlığı havanın kaldırma kuvvetine eşitse o cisim bırakıldığı noktada havada dengede kalır.

- Cismin ağırlığı havanın kaldırma kuvvetinden küçükse o cisim havada yükselir.

-Havasız ortamda havanın kaldırma kuvveti sıfırdır.

-Hacmi büyük olan cisme hava daha fazla kaldırma kuvveti uygular.

2.9. Blok Halinde Sabit İvme İle Hareket Eden Akışkanlar

Blok halinde sabit ivme ile hareket eden sıkıştırılamaz akışkanların (sıvılar) iki tipi vardır. Bunlar sabit ivmeli düzgün hareket ve düşey bir eksen etrafında dönme hareketi (cebri vorteks)'dir.

Sabit ivmeyle bir blok halinde yatay yönde hareket eden bir sıvının yüzeyinde eş basınç eğrileri oluşur ve hareket yönünde serbest yüzeyi eğimlenir (Şekil 2.17). Bu harekette serbest sıvı yüzeyinin eğimi aşağıdaki gibi bulunabilir (Ayyıldız 1984; Streeter ve Wylie 1983).

$$\tan\theta = \frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z}$$

Burada;

$\tan\theta = dz/dy$: Sıvının serbest yüzeyinin eğimi (-),
a_y : Sıvının yatay doğrultudaki ivmesi (m/s^2),
g : 9.81 m/s^2,
a_z : Sıvının düşey doğrultudaki ivmesi (m/s^2)'dir.

Formüldeki (-) işareti eğimin hareket doğrultusunda aşağı yönlü olduğunu göstermektedir.

Sabit ivmeli düzgün harekette yatay ve düşey düzlemdeki iki nokta arasındaki basınç farkı (dp) ise;

$dp = -\rho\, a_y\, dy - \rho.(g+a_z)\, dz$ bağıntısıyla bulunur.

İçerisinde sıvı bulunan döner bir silindirde dönme ekseninden (r) uzaklığındaki bir sıvı taneciğinin ivmesi a_z olup $r.w^2$ değerine eşittir ve yönü de eksene doğrudur. Bu taneciğe etki eden basınç, eksene olan uzaklığın (r) ve serbest sıvı yüzeyine olan düşey uzaklığın (z) fonksiyonudur (Şekil 2.18). Basınç farkı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$dp = \rho.r.w^2.dr - \gamma.\, dz$

Serbest sıvı yüzeyinin denklemi ise;

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r.w^2}{g}$$

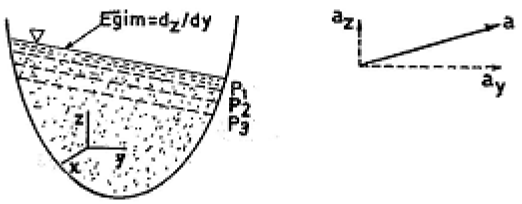
olup, bu eşitliğin integrali alındığında

$$z = \frac{w^2.r^2}{2.g} + \text{sabit}$$

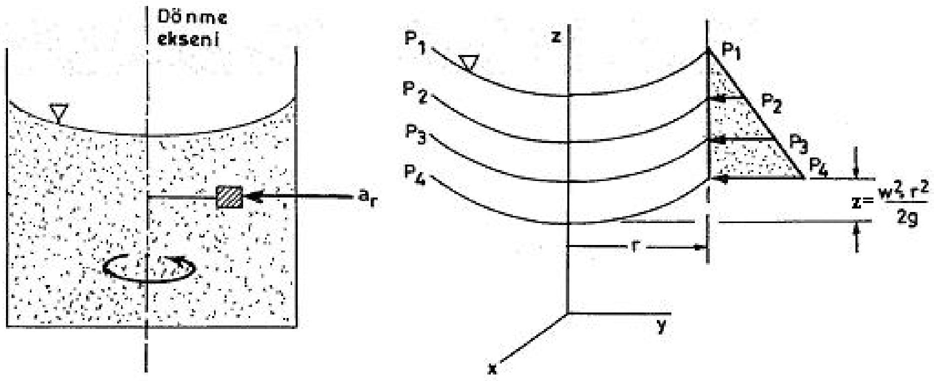
Bulunur (Edis 1972a, Bar-Meir 2011, White 2012). Buradaki;

z: Serbest sıvı yüzeyinin maksimum ve minimum noktaları arasındaki yükseklik farkıdır. Eğer referans noktası serbest sıvı yüzeyinin minimum noktası seçilirse sabit sıfır değerini alır. Cebri vorteksde yüzey denklemi bir paraboloiddir ve döner bir paraboloidin hacmi o paraboloidin dışına çizilen silindir hacminin yarısına eşittir.

Döner bir kaptaki sıvının dökülmeden meydana getirdiği paraboloidin maksimum ve minimum noktaları, sıvının dönmeden önceki serbest yüzeyine eşit uzaklıktadır.



Şekil 2.17. Sabit ivmeli düzgün harekette serbest sıvı yüzeyi (Munson vd. 1994)



Şekil 2.18. Cebri vortekste serbest sıvı yüzeyi (Munson vd. 1994)

2.10. Akışkan Statiğiyle İlgili Uygulama Örnekleri

<u>**ÖRNEK-2.1:**</u> Hidrostatik temel denge denklemini kullanarak statik sıvı ve gaz akışkanlarda basınç eşitliğini bulunuz.

Çözüm:

$$-\vec{\nabla}P - \gamma.\vec{k} = \rho.\vec{a}$$

a= 0 olduğundan (hareket yok)

$$-\vec{\nabla}P - \gamma.\vec{k} = 0$$

$$\vec{\nabla}P = -\gamma\vec{k}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} = -\gamma.\vec{k}$$

yazılabilir. Buradan vektörlerin eşitliğinden şunlar yazılabilir.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma$$

Bu sonuca göre yatay düzlemde statik akışkanda basınç bir noktadan diğer noktaya değişmemektedir. Basınç yalnızca z'ye bağlı olmakta yani yükseklikle değişmektedir. Bu nedenle basınç eşitliği diferansiyel formda yazılabilir.

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma$$

$dp = -\gamma.dz$

Bu denklem basıncın yükseklikle nasıl değiştiğini göstermektedir. Düşey doğrultuda basınç gradyentinin (eğiminin) negatif olduğu yani akışkan içerisinde yukarı çıkıldıkça basıncın azaldığı anlaşılmaktadır. Bu bağıntıda özgül ağırlığın sabit ya da değişken olması önemli değildir. Bu nedenle formül sıvı ve gazların, küçük yüksekliklerinde kullanılabilir. Ancak gazların büyük yüksekliklerinde özgül ağırlıktaki değişim dikkate alınmalıdır. Gazlardaki ideal gaz kanunu dikkate alındığında çok büyük yüksekliklerdeki basınç değişimi aşağıdaki gibi bulunabilir.

$P = \rho.R.T$

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g.P}{R.T}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{R.T}dz$$

Yükseklikle sıcaklığın sabit kaldığı değişmediği kabul edilir ve sıcaklık T_o olarak alınırsa;

$$P_2 = P_1.e^{\left(\frac{-g(z_2-z_1)}{R.T_0}\right)}$$ yazılabilir.

<u>ÖRNEK-2.2:</u> Kapalı bir tankta 3 m yüksekliğinde özgül kütlesi 1260 kg/m^3 olan gliserin vardır. Gliserinin üzerinde hava olup, bu havanın basıncı 41 370 Pa'dır.

a) Tankın tabanına yapılan basıncı,
b) Tankın tabanındaki basınç yükünü,
c) Tankın tabanındaki 50 cm x 50 cm'lik kare kapağa gelen hidrostatik basınç kuvvetini bulunuz?

Çözüm:

a) Tankın tabanındaki basınç gliserinin ve havanın yapmış olduğu basınçların toplamıdır.

$P = P_h + \gamma.h$

$$P = 41370\text{Pa} + \left(1260\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right).\left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2.}\right).(3\text{m})$$

P= 78 451,8 Pa

b) Basınç yükü yükseklik birimiyle ifade edilir.

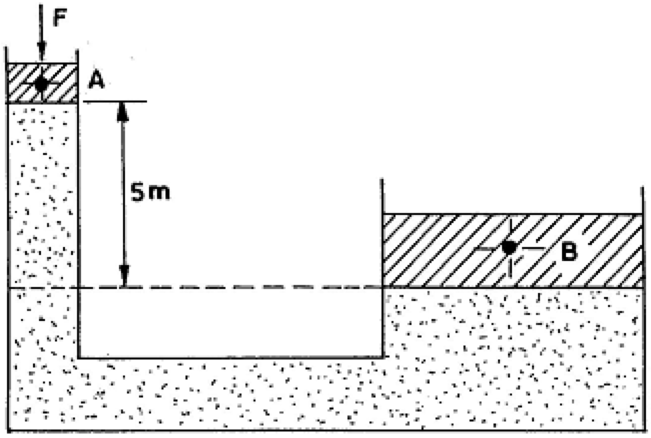
$$h = \frac{P}{\gamma_{su}} = \frac{78\,451{,}8\text{Pa}}{9810\ \ \text{N/m}^3}$$

h= 7,997 m

c) F= P.A= (78 451,8 Pa.).(0,5 m . 0,5 m)

F= 19612,95 N

<u>ÖRNEK-2.3:</u> Şekilde A pistonu ile B pistonunun alanları sırasıyla 0,004 m^2 ve 0,4 m^2'dir. B pistonunun ağırlığı $40\,000\,\text{N}$ olup kap ve ara bağlantılar 0,75 yoğunluklu yağ ile doldurulmuştur. A pistonunun ağırlığını ihmal ederek denge için gerekli F kuvvetini bulunuz?



Çözüm:

B pistonuna etkiyen basınç, A pistonuna etkiyen basınçla, 5 m'lik yağın yapmış olduğu basınca eşittir.

$$P_A + \rho.g.h = \frac{W_B}{A_B}$$

$$P_A = \frac{W_B}{A_B} - \rho.g.h$$

$$P_A = \frac{40\,000\ \mathrm{N}}{0{,}4\,\mathrm{m}^2} - \left(0{,}75.1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right).\left(9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right).(5\,\mathrm{m})$$

P_A= 63 212,5 Pa

F= $P_A.A_A$= (63 212,5 Pa.) . (0,004 $m^{2)}$

F= 252,85 N

ÖRNEK-2.4: Yerden 11 km yükseklikte stratosphere tabakasının başlangıcındaki mutlak basınç 22 600 Pa olup sıcaklık stratosphere tabakasının bitim noktası olan 20,1 km'ye kadar –56,5 C°'de sabit kalmaktadır. Stratosphere tabakasının 15. km'deki havanın mutlak basıncını ve özgül kütlesini bulunuz. g= 9,77 m/s² ve R= 286,9 j/kg.K alınacaktır.

Çözüm:

$$P_2 = P_1.e^{\left(\frac{-g(z_2-z_1)}{R.T_0}\right)}$$

$$P_2 = (22\,600\,Pa).e^{-\frac{9,77\,m/s^2(15000-11000)m}{286,9\,j/kg.K(273-56,.5)K}}$$

P_2= 12 046,6 Pa

$$\rho = \frac{P_2}{R.T_0} = \frac{12\ \ 046,6\,Pa}{\left(286,9\frac{j}{kg.K}\right).(273-56,5)\,K}$$

ρ= 0,194 kg/m^3

<u>ÖRNEK-2.5:</u> Yüksekliği 300 m olan bir binanın tepesi ile tabanı arasındaki basınç oranını (P_2/P_1) havayı a) Sıkıştırılabilir, b) Sıkıştırılamaz kabul ederek bulunuz. Hava sıcaklığı 15 C^o'de sabit olup havanın özgül ağırlığı 12 N/m^3, atmosfer basıncı 101330 Pa ve gaz sabiti 286,9 j/kg.K alınacaktır.

Çözüm:

a) $\frac{p_2}{p_1} = e^{\left(\frac{-g.(z_2-z_1)}{R.T_0}\right)}$ $\qquad$ $\frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{-9,81m/s^2(300m)}{286,9j/kg.K.(273+15)K}}$

$$\frac{P_2}{P_1} = 0.965$$

b) Havayı sıkıştırılamaz alırsak yani sıvı gibi kabul edersek ve binanın tabanındaki basınca P_1 dersek;

P_1= P_2 + $\gamma(z_2 - z_1)$

yazabiliriz. Buradan basınç oranı (P_2/P_1)

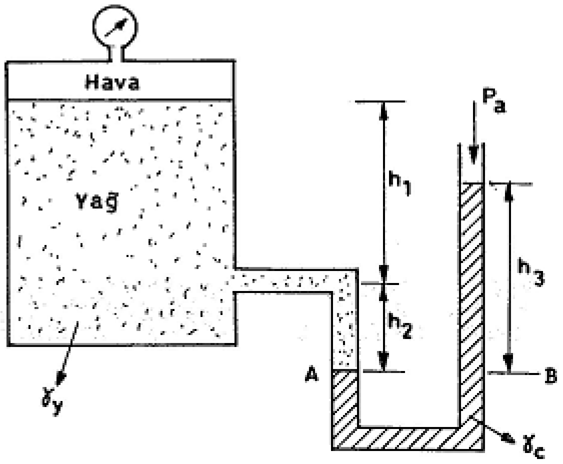
$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{\gamma(z_2 - z_1)}{P_1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{(12\ N/m^3).(300\ m)}{101\ \ 330\ Pa}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 0,9644$$

Yukarıdaki iki sonuç arasındaki farkın küçük olduğu görülmektedir. Yani binanın tabanı ile tavanı arasındaki basınç farklılığı çok küçüktür. Bu da havanın özgül kütlesindeki değişimin az olduğunu sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz akışkanların aynı sonucu verdiğini gösterir. Böylece metrelerle ifade edilebilen yükseklikler için sıvılarda kullanılan basınç formülü gazlar için de kullanılabilir, basınç farklılıkları ihmal edilebilir demektir.

ÖRNEK-2.6: Şekilde görülen tankta hava yağ tarafından tankın üstüne doğru sıkıştırılmıştır. Tanka bağlanan U-manometresinde h_1= 1 m, h_2= 0,2 m, h_3= 0,3 m'dir. Yağın özgül ağırlığı 9153 N /m^3, manometrede yükselen civanın özgül ağırlığı 133 416 N/m^3 ise tanka bağlı manometredeki basıncı bulunuz.



Çözüm:

A ve B noktalarında basınçları birbirlerine eşitleyelim.

$$P_A = P_{hava} + \gamma_y (h_1 + h_2)$$

$$P_B = P_a + \gamma_c . h_3$$

$P_A = P_B$'den

$$P_{hava} = P_a + \gamma_c . h_3 - \gamma_y (h_1 + h_2)$$

elde edilir. Biz manometrik basıncı bulacağımızdan atmosfer basıncı P_a= 0 alınır.

$$P_{hava} = 0 + \left(133416 \frac{N}{m^3}\right).(0{,}3\,m) - \left(9153 \frac{N}{m^3}\right).(1\ m + 0{,}2\ m)$$

$$P_{hava} = 29041{,}2\ Pa$$

ÖRNEK-2.7: Bir tankta bulunan havanın basıncı manometreyle ölçülmüş ve yerel atmosfer basıncı 760 mm Hg iken 530 000 Pa bulunmuştur. Yerel atmosferik basınç 773 mm Hg olduğunda manometredeki okunan basınç ne olur?

Çözüm:

Tanktaki mutlak basıncın her iki koşulda da birbirine eşit olması gerekir.

$$P_{1mut} = P_{2mut}$$

$$P_{1mut} = P_{1atm} + P_{1man}$$

$$P_{2mut} = P_{2atm} + P_{2man}$$

Bu eşitlikten

$$P_{2man} = P_{1atm} + P_{1man} - P_{2atm}$$

$$P_{2man} = 760\ \text{mmHg} + 530000\ \text{Pa} - 773\ \text{mmHg}$$

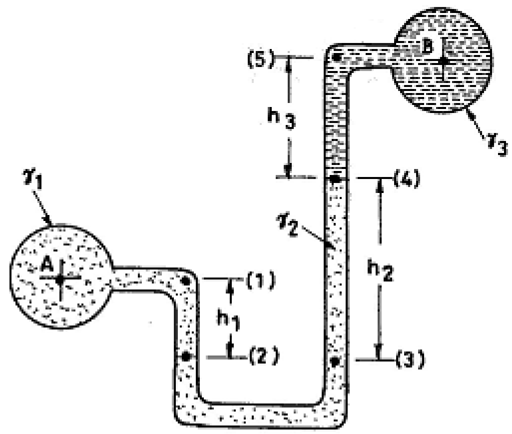
$$P_{2man} = 530000\text{Pa} - 13\ \text{mmHg}$$

$$P_{2man} = 530000\text{Pa} - \frac{13\,\text{mmHg}}{7{,}501.10^{-3}\,\frac{\text{mmHg}}{\text{Pa}}}$$

$$P_{2man} = 528267\text{Pa}$$

$1\,\text{Pa} = 7{,}501.10^{-3}\ \text{mm Hg}$ alınmıştır.

ÖRNEK-2.8: Aşağıdaki Şekilde verilen A ve B borularındaki basınç farkını bulunuz.



Çözüm:

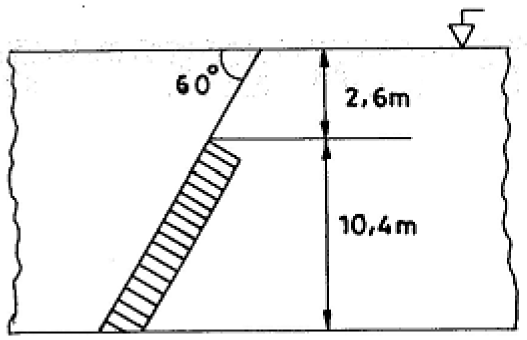
A ve B noktaları arasındaki basınç farkını bulmak için A noktasından başlayarak basınçları yazalım. Aşağı indikçe basıncı pozitif, yukarı çıktıkça basıncı negatif alalım.

$$P_A + \gamma_1.h_1 - \gamma_2.h_2 - \gamma_3.h_3 = P_B$$

$$P_A - P_B = \gamma_2.h_2 + \gamma_3.h_3 - \gamma_1.h_1 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK-2.9: Bir kapak Şekilde gösterildiği gibi 60° eğimli olarak baraj tabanına yerleştirilmiştir. Barajın derinliği 13 m, baraj suyunun özgül ağırlığı 9810 N/m³, kapağın genişliği 5 m ve I x c = 720 m⁴ olarak verilmiştir.

a) Kapağa etki eden sıvı basınç kuvvetini,
b) Basınç kuvvetinin etkidiği basınç merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay ve düşey mesafesini
c) Ağırlık merkezi ile basınç merkezi arasındaki uzaklığı bulunuz.



Çözüm:

Kapağın tabanından serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığına X, kapağın tepesinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığına X_1 ve kapağın uzunluğuna L diyelim.

$$X = \frac{(10{,}4\,m + 2{,}6\,m)}{Sin60} = 15\,m$$

$$X_1 = \frac{2{,}6}{Sin60} = 3\,m$$

L= X-X_1 = 15 m – 3 m = 12 m

a) Basınç prizması yöntemini kullandığımızda, meydana çıkan Şekil bir yamuk olup yamuğun hacmi sıvı basınç kuvvetine eşittir.

$$F_R = \left(\frac{\gamma.(10{,}4\,m + 2{,}6\,m) + \gamma.(2{,}6\,m)}{2}\right).L.b$$

$$F_R = \left(\frac{\left(9810\frac{N}{m^3}\right).(10{,}4\,m + 2{,}6\,m + 2{,}6\,m)}{2}\right).12\,m.5\,m$$

$F_R = 4\,591\;080\,N$ bulunur.

Basınç kuvvetinin bulunmasında ağırlık merkezinin serbest sıvı yüzeyi olan h_c yüksekliğini kullanırsak da aynı sonucu buluruz.

$$F_R = \gamma.h_c.A = \left(9810\frac{N}{m^3.}\right).((6\,m + 3\,m).Sin60).(5\,m.12\,m)$$

$$F_R = 4\,591\;080\,N$$

b) Basınç kuvvetinin etkidiği basınç merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay (y_R) ve düşey (h_R) uzaklıkları aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_R = \frac{Ixc}{y_c.A} + y_c$$

Burada;

y_c : Ağırlık merkezinin serbest sıvı yüzeyine olan yatay uzaklığı olup 6+3= 9 m'dir.

Ixc : Atalet momenti olup 720 m^4 olarak verilmiştir.

$$y_R = \frac{720\ m^4}{(9\ m).(12\ m.5\ m)} + 9\ m$$

$$y_R = 10{,}3333m$$

$$h_R = y_R.Sin60 = (10{,}3330\,m).(Sin60)$$

$$h_R = 8{,}9489\ m$$

c) Basınç merkezi (y_R) ile ağırlık merkezi (y_c) arasındaki uzaklık (e);

e= y_R-y_c= 10,3333 m-9 m

e= 1,3333 m

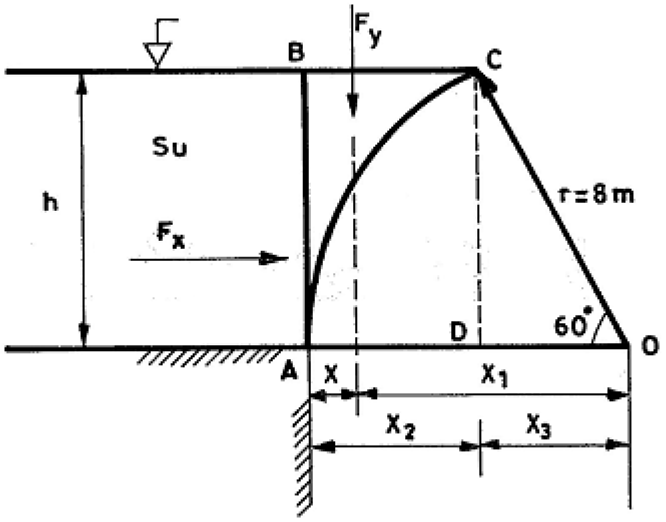
bulunur. Ya da (y_R) bağıntısından

$$e = y_R - y_c = \frac{Ixc}{y_c.A} = \frac{720\,m^4}{9\ m.(12m.5m)}$$

e= 1,3333 m

elde edilir.

<u>ÖRNEK-2.10:</u> Şekilde görülen AC kapağın yarıçapı r = 8 m, genişliği yani Şekil düzlemine dik boyutu b= 12 m olduğuna göre kapağa suyun yaptığı basınç kuvvetinin yatay ve düşey bileşenleri ile bu bileşenlerin A noktasına olan uzaklıklarını bulunuz. Suyun özgül ağırlığı 9810 N/m^3 alınacaktır.



Çözüm:

AC radyal kapağa etki eden hidrostatik basıncın yatay bileşeni, bu yüzeyin düşey düzlem üzerindeki izdüşümüne gelen basınç kuvvetine eşittir. Buna göre AB düzlemine gelen basınç kuvvetinin hesaplanması gerekmektedir.

$$F_x = \frac{1}{2}.\gamma.h^2.b = \frac{1}{2}.\left(9810\frac{N}{m^3}\right).(8\,m.Sin60)^2.(12\,m)$$

$$F_x = 2\,825\,280\,N$$

F_x başka bir yöntemle aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$F_x = \gamma.hc.A = \left(9810\frac{N}{m^3}\right).\left(\frac{8\,m.Sin60}{2}\right).(8\,m.Sin60.12m)$$

$$F_x = 2\,825\,280\ \mathrm{N}$$

Radyal kapağa etki eden hidrostatik basınç kuvvetinin düşey bileşeni ise bu yüzeyin üzerinde bulunan sıvının ağırlığına eşittir.

$$F_y = \gamma.\forall$$

$$F_y = \gamma.A.b$$

A alanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A = ABC = (ABCD + CDO) - ACO$$

$$A = ABC = \left[(r - r\cos 60)h + \left(\frac{1}{2} r\cos 60.h\right)\right] - \left(\pi r^2 \frac{60}{360}\right)$$

$$A = ABC = \left[(8 - 8.0{,}5)8.\sin 60 + \left(\frac{1}{2}.8.\cos 60.8.\sin 60\right)\right] - \left(\pi.8^2.\frac{60}{360}\right)$$

$$A = ABC = 8{,}058\mathrm{m}^2$$

$$F_y = \left(9810\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right).\left(8{,}058\mathrm{m}^2\right).(12\,\mathrm{m})$$

$$F_y = 948\ 587{,}76\,\mathrm{N}$$

Yatay bileşen kuvvetinin (F_x) uygulama noktasının A noktasına olan uzaklığı h/3 olup sayısal değeri;

$$\frac{h}{3} = \frac{8\mathrm{m}.\sin 60}{3}$$

$$\frac{h}{3} = 2{,}31\mathrm{m}$$

Düşey bileşen kuvvetinin uygulama noktasının A noktasına olan uzaklığı ise bu iki bileşenin 0 noktasına göre momentlerinin alınmasıyla hesaplanır.

$$F_x.\frac{h}{3} - F_y.x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{F_x.h}{3.Fy} = \frac{(2\,825\,280\ \mathrm{N}).(8\,\mathrm{m}.\sin 60)}{(3).(948\,587{,}76\ \mathrm{N})}$$

$x_1 = 6{,}88\,m$

Fy kuvvetinin A noktasına olan uzaklığı (x);

x= r-x_1= 8 m – 6,88 m

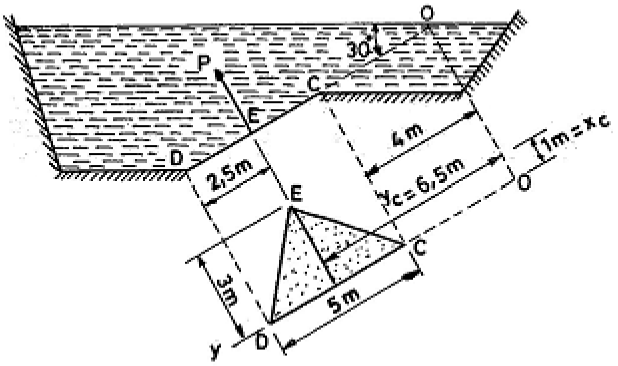
x= 1,12 m

elde edilir.

ÖRNEK-2.11: Üçgen bir kapı (CDE), CD kenarından bağlı olup, bu kenardan açılıp kapanabilmektedir. Kapının açılması için gerekli olan kuvvet E noktasından uygulanmakta ve P ile gösterilmektedir. Aşağıdaki Şekilde görülen depoda yoğunluğu SG= 1,0 olan bir sıvı bulunmakta ve deponun üstü atmosfere açılmaktadır. Kapının ağırlığını ihmal ederek;

a) Kapıya yağın uyguladığı basınç kuvvetini ve bu kuvvetin uygulama noktasını (y_R, x_R) bulunuz.

b) Kapının açılabilmesi için gerekli olan P kuvvetini hesaplayınız.



Çözüm:

a) $F_R = \gamma . h_c . A = \left(9810 \dfrac{N}{m^3}\right).(6{,}5\,m.\sin 30).\left(\dfrac{1}{2}.5\,m.3\,m\right)$

$$F_R = 239119\ N$$

$$y_R = \frac{Ixc}{y_c.A} + y_c$$

$$Ixc = \frac{b.a^3}{36} = \frac{(5\,m).(3\,m)^3}{36}$$

$$Ixc = 3{,}75\,m^4$$

$$A = \frac{1}{2}.b.h = \frac{1}{2}.5m.3m$$

$$A = 7{,}5 m^2$$

$$y_c = 6{,}5 m$$

$$y_R = \frac{3{,}75 m^4}{(6{,}5 m).(7{,}5 m^2)} + 6{,}5 m$$

$$y_R = 6{,}58 m$$

$$x_R = \frac{Ixyc}{y_c.A} + x_c$$

$$Ixyc = \frac{b.a^2}{72}(b - 2d) = \frac{5m.(3m)^2}{72}(5 m - 2.2{,}5 m) = 0$$

$$x_c = \frac{a}{3} = \frac{3\ m}{3} = 1\ m$$

$$x_R = \frac{0}{6{,}5\ m.7{,}5\ m^2} + 1\ m$$

$$x_R = 1\ m$$

Basınç merkezi ile ağırlık merkezi aynı çizgi üzerinde ancak e= $y_R - y_c$ = 0,08 m aşağıdadır.

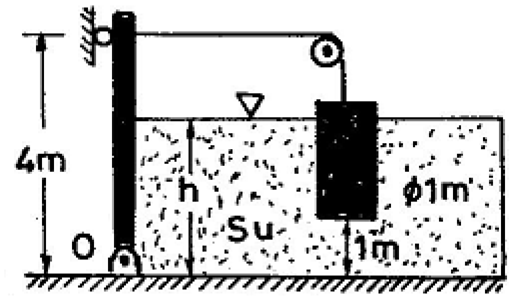
b) Kapının açılması için gerekli olan P kuvvetini hesaplamak amacıyla CD eksenine göre moment alalım.

$$P.3m = F_R.1m$$

$$P = \frac{(F_R).(1\ m)}{3\ m} = \frac{(239119\ N).(1\ m)}{3\ m}$$

$$P = 79706\ N$$

<u>ÖRNEK-2.12:</u> Çapı 1 m ve kütlesi m olan bir silindir Şekilde görüldüğü gibi 2 m genişliğinde ve 4 m yüksekliğinde bir kapıya bağlanmıştır. Kapı, su seviyesi h= 2,5 m'nin altına düştüğü anda açılacaktır. Sürtünmeleri ihmal ederek silindirin m kütlesini bulunuz.



Çözüm:

Öncelikle kapıya suyun yaptığı basınç kuvvetini bulalım.

$$F_R = \gamma . h_c . A$$

Kapı, su seviyesi h= 2,5 m'nin altına düştüğü zaman açılacağına göre 2,5 m'lik suyun yaptığı basınç kuvvetini bulacağız.

$$F_R = \left(9810 \frac{N}{m^3}\right).\left(\frac{2{,}5\,m}{2}\right).(2{,}5\,m . 2\,m)$$

$$F_R = 61\,312{,}5 \text{ N}$$

Bileşke kuvvetin kapıya olan etki noktası yani basınç merkezi h/3'dür.

$$\frac{h}{3} = \frac{2{,}5m}{3}$$

0 noktasına göre moment alarak silindirin bağlı olduğu ipe gelen kuvveti bulalım. İpteki gerilme kuvveti T olsun.

$$T.4m = F_R . \frac{h}{3}$$

$$T = \frac{F_R . h}{12\,m} = \frac{(61\,312{,}5 \text{ N}).(2{,}5\,m)}{(12\,m)}$$

$$T = 12\,773{,}44 \text{ N}$$

Silindire etkiyen kendi ağırlığı (W); kaldırma kuvveti (F_B) ve ipteki gerilme kuvveti (T) arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$W = F_B + T$$

Kaldırma kuvveti silindirin suya batmış hacmi ile suyun özgül ağırlığının çarpımına eşittir.

$$F_B = \gamma.\forall_b = \gamma.\left(\frac{\pi.D^2}{4}\right).(h - 1\,m)$$

$$F_B = \left(9810\frac{N}{m^3.}\right).\left(\frac{\pi.1^2}{4}\right).(2{,}5\,m - 1m)$$

$$F_B = 11557{,}13\,N$$

$$W = 11557{,}13\,N + 12\,773{,}44\,N$$

$$W = 24\,330{,}57\,N$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{24\,330{,}57\ N}{9{,}81\ m/s^2} = 2480{,}18\ kg$$

<u>ÖRNEK-2.13:</u> Özgül ağırlığı ölçülmek istenen mısırın havadaki ağırlığı W_h= 0,044 N olup özgül ağırlığı 9810 N/m^3 olan suya batırılıyor. Mısırın sudaki ağırlığı W_s= 0,011 N ölçüldüğüne göre denemeye alınan mısırın hacmini ($\forall_m$) ve özgül ağırlığını (γ_m) bulunuz.

Çözüm:

Mısır suya batırıldığında kaldırma kuvveti mısırı kaldırmaya çalışacak yani onu hafifletecektir. Sudaki mısıra etkiyen kaldırma kuvvetine göre mısırın havadaki ağırlığı sudaki ağırlığı ile kaldırma kuvetinin (F_B) toplamına eşittir.

$$W_h = W_s + F_B$$

$$F_B = W_h - W_s = 0{,}044\ N - 0{,}011\ N$$

$$F_B = 0.033\,N$$

Kaldırma kuvveti bilindiği gibi cismin taşırdığı sıvının ağırlığıdır. Ya da cismin sıvıya batan kısmının hacmi ile sıvının özgül ağırlığının çarpımıdır.

$$F_B = \gamma.\forall_m$$

$$\forall_m = \frac{F_B}{\gamma} = \frac{0{,}033\,N}{9810\,\frac{N}{m^3}}$$

$$\forall_m = 3{,}36391.10^{-6}\,m^3$$

mısırın özgül ağırlığı (γ_m)

$$\gamma_m = \frac{W_h}{\forall_m} = \frac{0{,}044N}{3{,}36391.10^{-6}.m^3}$$

$$\gamma_m = 13\ 080 \frac{N}{m^3}$$

<u>ÖRNEK-2.14:</u> Yüksekliği 1,2 m, uzunluğu 3 m ve genişliği 2 m olan dikdörtgen prizması biçimindeki depo 0,8 m yüksekliğinde özgül ağırlığı 11 772 N/m^3 olan bir yağ ile doludur. Bu yağ deposunun yatay doğrultuda 2 m/s^2'lik sabit ivme ile çekilmesi durumunda;

a) Yağ yüzeyinin yatayla yaptığı açıyı,
b) Deponun hareket doğrultusundaki yüzeylerine etki eden bileşke basınç kuvetlerini bulunuz.

Çözüm:

a) Yağ yüzeyinin yatayla yaptığı açı (θ);

$$\frac{dz}{dy} = \tan\theta = \frac{a_y}{g + a_z}$$

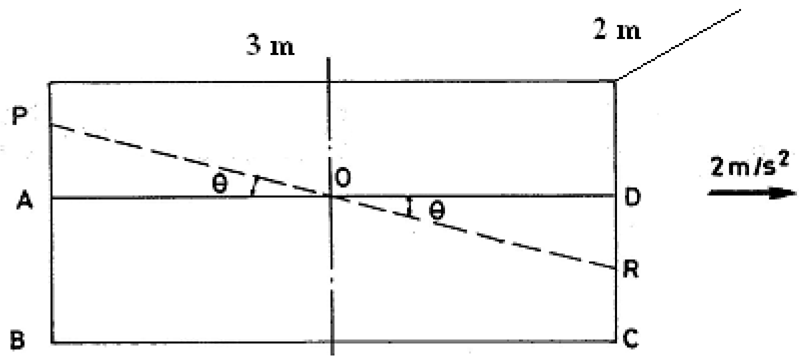
düşey doğrultuda bir hareket olmadığı için a_z= 0 alınır.

$$\tan\theta = \frac{a_y}{g}$$

$$\tan\theta = \frac{2\,m/s^2}{9{,}81 m/s^2}$$

θ= 11.52^o

b) Deponun hareket halindeki şematik resmini çizelim



Depo hareket halinde iken yağın etkidiği yan yüzeyler PB ve RC olmaktadır. Bu iki yüzeye gelen yağ basınç kuvvetini yağı statik kabul ederek bulabiliriz. Önce uzunlukları bulalım.

$$|AP| = |DR| = |OA|.\tan\theta$$

$$|AP| = |DR| = \frac{|BC|}{2}.\tan 11{,}52$$

$$|AP| = |DR| = 0{,}306\text{m}$$

$$|PB| = |AP| + |AB| = 0{,}306\text{m} + 0{,}8\,\text{m}$$

$$|PB| = 1.106\,\text{m}$$

$$|CR| = |DC| - |DR| = 0.8\text{m} - 0.306\text{m}$$

$$|CR| = 0{,}494\text{m}$$

BP yüzeyine gelen kuvvet (F_{BP});

$$F_{BP} = \frac{1}{2}\gamma.|PB|.|PB|.b$$

$$F_{BP} = \frac{1}{2}.\left(11772\frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right).(1{,}106\,\text{m})^2.(2\,\text{m})$$

$$F_{BP} = 14\,400\ \text{N}$$

CR yüzeyine gelen kuvvet (F_{CR});

$$F_{CR} = \frac{1}{2}.\gamma.|CR|^2.b = \frac{1}{2}.11772\frac{N}{m^3}(0{,}494m)^{2.}.2m$$

$$F_{CR} = 2872{,}8\text{N}$$

F_{BP} ve F_{CR} kuvvetlerini aşağıdaki yöntemle de bulabiliriz.

$$F_{BP} = \gamma.h_c.A$$

$$A = |PB|.b$$

$$h_c = \frac{|PB|}{2}\text{'dir.}$$

$$F_{BP} = \left(11772\frac{N}{m^3}\right).\left(\frac{1,106\,m}{2}\right).(1,106\,m.2\,m)$$

$$F_{BP} = 14\,400\ N$$

$$F_{CR} = \gamma.h_c.A$$

$$A = |CR|.b$$

$$h_c = \frac{|CR|}{2}$$ 'dır.

$$F_{CR} = \left(11722\frac{N}{m^3}\right).\left(\frac{0,494\,m}{2}\right).(0,494\,m.2\,m)$$

$$F_{CR} = 2872,8N$$

<u>ÖRNEK-2.15:</u> Yarıçapı r= 0,30 m ve yüksekliği H= 0,90 m olan üstü atmosfere açık silindir şeklindeki kap h= 0,70 m yüksekliğine kadar su ile doludur. Suyun serbest yüzeyine ait paraboloidin kabın tabanına teğet olması için silindir kabın z düşey ekseni etrafında hangi sabit w açısal hızı ve hangi sabit n devir sayısı ile döndürülmesi gerektiğini ve bu durumda silindirden atılan suyun hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

Suyun serbest yüzeyine ait paraboloidin kabın tabanına teğet olması demek su yüksekliği ya da suyun tepe noktası ile en alt noktası olan z'nin kabın yüksekliğine eşit olması demektir.

$$Z = H = 0.90m$$

Cebri vortekste sıvı serbest yüzeyinin denklemini yazalım.

$$z = \frac{w^2.r^2}{2g}$$

$$w = \left(\frac{z.2.g}{r^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(0,90\,m).(2).(9,81\,m/s^2)}{(0,30)^2}\right)^{1/2}$$

$$w = 14\ rad/s$$

Açısal hız denkleminden de devir sayısı bulunur.

$$w = \frac{2\pi.n}{60}$$

$$n = \frac{60\,w}{2.\pi} = \frac{60.(14\,rad/s)}{2.\pi}$$

$$n = 133{,}69\,min^{-1}$$

Silindirden atılan su miktarını bulmak için başlangıçta kapta bulunan sudan, son durumda kapta kalan su miktarını çıkartırız.
Başlangıçtaki su miktarı:

$$\forall_1 = \pi\, r^2 h = \pi.(0{,}30\,m)^2.(0{,}70\,m) = 0{,}1979\,m^3$$

Döndürüldükten sonra kapta kalan su miktarı $(\forall_2)$:

$$\forall_2 = \frac{1}{2}\pi\, r^2 H = \frac{1}{2}.\pi.(0{,}30\,m)^2.(0{,}90\,m) = 0{,}1272\ m^3$$

Kaptan atılan su miktarı:

$$\forall = \forall_1 - \forall_2 = 0{,}1979\ m^3 - 0{,}1272\ m^3 = 0{,}0707\ m^3\text{'dür.}$$

<u>ÖRNEK-2.16:</u> Çapı 1 m olan bir tankın, düşey simetri ekseni etrafında sabit bir ω açısal hızı ile dönmesi halinde paraboloid sıvı yüzeyinin tepe noktası ile en alt (taban) noktası arasındaki mesafenin z= 0,40 m olabilmesi için;

a) ω açısal hızını ve n devir sayısını,
b) Tankın dönmeye başlamadan önce tamamen dolu olması halinde, tankın ekseni etrafında dönerek aynı paraboloidin meydana gelebilmesi için tanktan atılması gerekli sıvı hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

a) Sıvı serbest yüzeyinin denklemini yazalım.

$$z = \frac{w^2.r^2}{2g}$$

$$w = \left(\frac{2.g.z}{r^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(2).(9{,}81 m/s^2).(0{,}40\,m)}{(0{,}5\,m)^2}\right)^{1/2}$$

$$w = 5{,}60\ rad/s$$

Açısal hız denkleminden devir sayısı bulunur.

$$w = \frac{2\pi n}{60}$$

$$n = \frac{60.w}{2.\pi} = \frac{60.(5{,}60\ rad/s)}{2.\pi}$$

$$n = 53{,}48 min^{-1}$$

b) Tanktan atılan sıvı hacmini bulmak için z= 0,40 m olan paraboloidin hacmini bulmak yeterlidir. Çünkü atılan su meydana gelen paraboloid hacmi kadardır. Paraboloid hacmi ise bu paraboloide teğet olan silindir hacminin yarısına eşittir. Burada meydana gelen silindirin yarıçapı r = 0,50 m, yüksekliği, z= 0,40 m'dir. Buna göre atılan su hacmi ($\forall$);

$$\forall = \frac{1}{2}.\pi.r^2.z = \frac{1}{2}.\pi.(0{,}50m)^2.(0{,}40m)$$

$\forall = 0{,}157\,m^3$'dür.