Bölüm 10: Katı Cismin Sabit bir Eksen Etrafında Dönmesi

Kavrama Soruları

1- Bir nokta etrafında dönmekte olan cismin hareketini tanımlamak için nasıl bir yer değiştirme tanımlarsınız?
2- Açısal hızın yönü varmıdır, veya açısal hız vektörel bir nicelikmi dir?
3- Dönme olayında, sürtünme ihmal edilse de, cisimlerin kütlesinin şekli önemlimidir?

Konu İçeriği

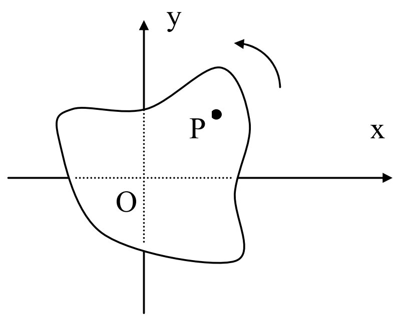
Sunuş

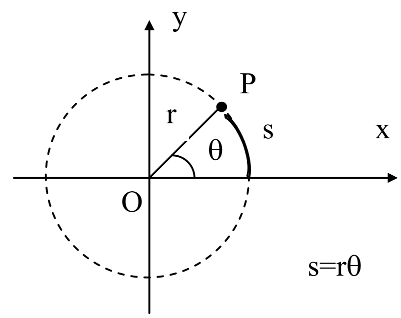
Bu bölümde, önce sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cismin açısal yer değiştirme, açısal hız ve açısal ivme nicelikleri türetilecek ve dönme hareketi ile açısal hareket arsındaki ilişki ve benzerlikler elde edilecektir. Daha sonra dönme hareketi yapan katı bir cismin dönme kinetik enerji ifadesi türetilecektir. Bir kuvvetin bir cismi bir nokta etrafında döndürme etkisinin ifadesi olan tork kavramı tanımlanacaktır. İki vektörün vektörel çarpımı tanımlanarak tork kavramı kuvvet ve uzunluk vektörleri ile vektörel çarpım olarak ifade edilecektir. Son olarak da bir kuvvetin döndürme etkisi ile açısal ivme arasında nasıl bir ilişki olduğu incelenerek Newton'un 2. yasasının dönü hareketi için ifadesi elde edilecektir.

10.1 Açısal Yer Değiştirme, Hız ve İvme

Dönme olayını inceleyebilmek için öncelikle dönme hareketini en iyi tanımlayacak yerdeğiştirme niceliğini tanımlamamız gerekecektir. Bu yer değiştirmeyi tanımladıktan sonra doğrusal harekette tanımladığımız gibi yer değiştirmenin zamana göre değişimine bakarak dönen cismin hızını (açısal hız), dönüş hızının birim zamandaki değişiminden de dönü hızındaki değişmeleri gösteren dönü ivmesi (açısal ivme) kavramlarını türetebiliriz.

Aşağıdaki gibi, O noktası etrafında dönebilen herhangi bir şekle sahip katı bir cismi göz önüne alalım. Bu cismin üzerinde tanımladığımız bir P noktasının hareketini inceleyelim.





Sabit O merkezi etrafında r yarıçaplı P noktasının aldığı yol s, yarıçap r ve x ekseni ile ölçülen q açısı cinsinden

$$s=r\theta$$

θ'nın birimi radyan (rad)'dır. Bir radyan, yarıçapla eşit uzunluktaki bir yay parçasının yarıçapa oranı ile elde edilen açıdır.

$$s=r=r.\theta(1 \text{ radyan})$$

Radyan açı ölçüsü ile derece açı ölçüsü arasındaki ilişki

$$\theta(\text{rad})=(\pi/180^o).\theta(\text{derece})$$

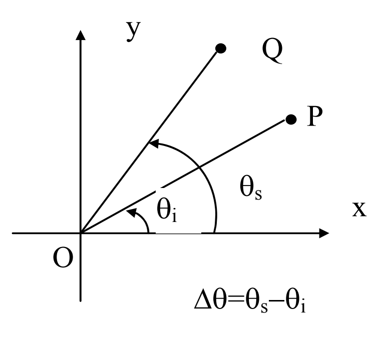
Açısal Yer değiştirme:

r yarıçaplı P noktasının Δt zaman sonra Q noktasına geldiğini düşünürsek P noktasının açısal yer değiştirmesi:

$$\Delta\theta=\theta_s-\theta_i$$

şeklinde yazılabilir.

Açısal yer değiştirmenin boyutu yoktur!, birimi ise radyandır!



Ortalama Açısal Hız (ω_{ort}):

Ortalama açısal hız (ω_{ort}), Δt zaman aralığındaki açısal yer değiştirmenin(Δθ), Δt zamanına oranıdır.

$$\omega_{ort} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_s - \theta_i}{\Delta t}$$

Ani Açısal hız (w):

Ani açısal hız (ω), Δt zamanı limit durumda sıfıra gittiğinde (Δt→0) açısal yer değiştirmenin (Δθ), zamana oranıdır.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

θ açısı boyutsuz olduğundan açısal hızın boyutu [ω]=1/[T]'dir. Birimi ise radyan/saniye (rad/s) veya s^{-1} dir. Açısal hız vektörel bir niceliktir öyle ki yönü aşağıdaki gibi belirlenir.

Açısal hızın yönü:

Dönme açısı, saat ibresinin tersi yönde artarsa (sağ el) ω pozitif
Dönme açısı, saat ibresi ile aynı yönde artarsa (sol el) ω negatifdir.

Ortalama açısal ivme (α_{ort}):

Ortalama açısal ivme(α_{ort}), Δt zaman aralığındaki açısal hızdaki değişme miktarının (Δω) geçen zamana oranıdır.

$$\alpha_{ort} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_s - \omega_i}{\Delta t}$$

Ani açısal ivme (α):

Ani açısal ivme (α), Δt zaman aralığı limit durumda sıfıra gittiğinde (Δt→0) açısal hızın (Δω) zamana oranıdır.

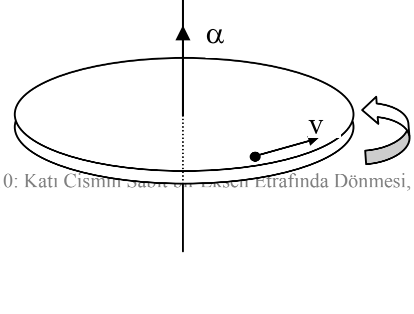
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

θ açısı boyutsuz olduğundan açısal ivmenin boyutu [α]=1/[T^2]'dir. Birimi ise radyan/saniye^2 (rad/s^2) veya s^{-2} dir.

Açısal ivmenin yönü:

Açısal hız artarsa (saat ibresi ile aynı veya ters yönde) α pozitif
Açısal hız azalırsa (saat ibresi ile aynı veya ters yönde) α negatif dir.

v,w ve α'nın yönleri:



v çizgisel hız yörüngeye teğettir.
ω dönme ekseni üzerindedir
Saat yönünün tersi yönde ise ω, +y;
Saat yönünü ile aynı yönde ise ω, -y;

α (açısal ivme), ω ile aynı yönlüdür.

*Açısal hız vektörünün yönünü belirlemek için "**sağ el kuralı**":* Açısal hızın yönünü bulmak için sağ elimizi kullanabiliriz. Bu kuralda sağ elin baş parmak dışındaki dört parmağı birleştirilip kıvrılarak dönen cismin dönüş yönü ile çakıştırılır (parmaklar çizgisel (teğetsel) hızın yönünü gösterecek şekilde ayarlanır). Baş parmak bu dört parmağa dik tutulur ve baş parmağın gösterdiği yön açısal hızın yönünü gösterir.

Doğrusal ve açısal hareketi tanımlamada kullanılan nicelikleri karşılıklı olarak yazarsak:

Açısal	***Doğrusal***	
θ	x	(yerdeğiştirme)
ω	v	(hız)
α	a	(ivme)

10-2 Dönme Kinematiği: Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi

Daha önce doğrusal hareket için türettiğimiz kinematik eşitlikleri dönme hareketine uyarlayabiliriz. Doğrusal harekette türettiğimiz formüllere dönü hareketini tanımlayan x, v ve a yerine açısal yerdeğiştirme($\Delta\theta$), açısal hız(ω) ve açısal ivme(α) niceliklerini yazarsak:

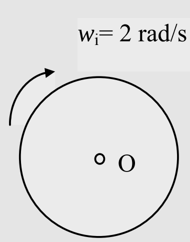
Sabit ivmeli doğrusal hareket	***Sabit açısal ivmeli dönme hareketi***
$v_s = v_i + at$	$\omega_s = \omega_i + \alpha t$
$x_s = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta_s = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v_s^2 = v_i^2 + 2ax$	$\omega_s^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$

elde ederiz. Doğrusal ve açısal nicelikler arasındaki ilişki bir sonraki başlık altında ayrıntılı olarak incelenecektir.

Örnek 10.1 *Dönen Teker:* Bir tekerlek, 3,5 rad/s2'lik sabit açısal ivme ile dönüyor. t=0 s'de tekerleğin açısal hızı 2 rad/s ise;

a) 2 saniyede teker ne kadarlık açı süpürür?
b) t=2 s sonra açısal hızı nedir?

Çözüm:



a) $\theta_s = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

=(2rad/s).(2s)+½(3,5 rad/s^2).(2s)^2=11 rad=630^o

Devir sayısı=$\Delta\theta$/360^o (derece/dev)=1,75 devir

b) $\omega_s = \omega_i + \alpha t$

=(2 rad/s)+(3,5 rad/s^2).(2s)=9 rad/s bulunur..

10-3 Açısal ve Doğrusal Nicelikler

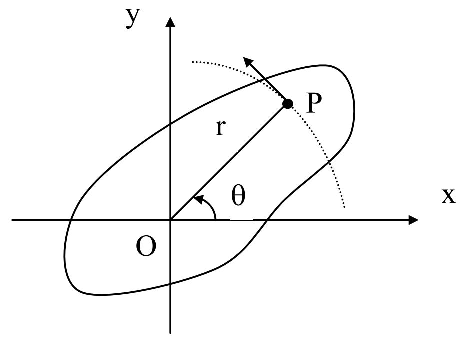
Dönen bir cismin açısal hız ve ivmesi ile cismin üzerindeki bir noktanın çizgisel hız ve ivmesi arasında nasıl bir bağlantı vardır? Yandaki şeklin yardımı ile bu ilişkiyi bulmaya çalışalım.

$s=r\theta \quad r=\text{sabit}$

Teğetsel hız: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\theta) = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

$v = r\omega$

Teğetsel ivme: $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\omega) = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha$



Daha önce dairesel yörüngede dönen bir noktanın merkeze yönelik v^2/r büyüklüğünde $\mathbf{a_r}$ merkezcil ivme ile hareket ettiğini görmüştük. $\mathbf{a_r}$ ivmesinin büyüklüğünü ω açısal hız cinsinden yazarsak:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

Dönen bir katı cisim üzerinde hareket eden bir noktanın toplam ivmesi, a_t teğetsel, a_r'de açısal ivme olmak üzere:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a_t}+\mathbf{a_r}$$

Bu ivmenin büyüklüğü: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

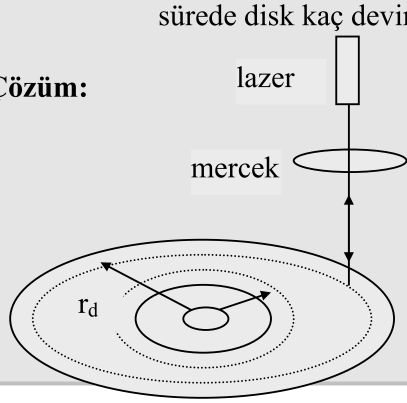
bulunur.

Örnek 10.2 *CD Çalar:* Tipik bir CD plağında disk saatin tersi yönünde döner ve lazer-mercek sistemi noktasında yüzeyin sabit hızı 1,3 m/s dir. CD'nin iç yarıçapı r_i=23 mm ve dış yarıçap r_d=58 mm'dir.

a) Diskin açısal hızını devir başına dakika olarak iç ve dış noktada bulunuz.

b) Standart bir CD'nin maksimum çalma süresi 74 dakika 33 saniyedir. Bu sürede disk kaç devir yapar?

Çözüm:



a) En içteki iz için açısal hız

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1{,}3m/s}{2{,}3x10^{-2}m} = 56{,}5rad/s$$

$$\omega_i = (56{,}5rad/s).(\frac{1}{2\pi}dev/rad).(60s/dak)$$

$$= 5{,}4x10^2\,devir/dak$$

En dıştaki iz için açısal hız

$$\omega_d = \frac{v}{r_d} = \frac{1{,}3m/s}{5{,}8x10^{-2}m} = 22{,}4 rad/s$$

$$\omega_d = 2{,}1x10^2 \, devir/dakika$$

b) t=(74dak).(60 s/dak)+33s=4473 saniye

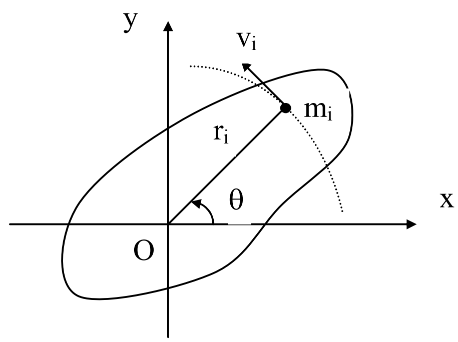
İlk açısal konum $\theta_i=0^o$, θs=?

Ortalama açısal hız=$(\omega_i+\omega_s)/2$s

$\theta_s=\theta_i+½(\omega_i+\omega_s)t$=0+(540dev/dak+210dev/dak).(1760dak/s).(4473s)=$2{,}8x10^4$ devir bulunur

10-4 Dönme Enerjisi

O ekseni etrafında dönen katı cismin kinetik enerjisini bulmaya çalışalım. Katı cismin m_i gibi küçük parçacıklardan oluştuğunu ve O ekseni etrafında sabit ω açısal hızı ile döndüğünü kabul edelim.



m_i. parçacığın teğetsel hızı v_i ise kinetik enerjisi K_i

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Toplam kinetik enerji K_T

$$K_T = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega_i^2$$

ω_i her nokta için aynı olduğundan ($\omega_i=\omega$)

$$K_T = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$$

yazılabilir. Bu ifade

$$K_T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

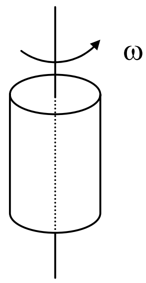
şeklinde daha önce yazılan kinetik enerji K=(1/2)mv^2 formunda yeniden yazılırsa

$I \equiv \sum m_i r_i^2$ ifadesine dönme eylemsizlik momenti denir.

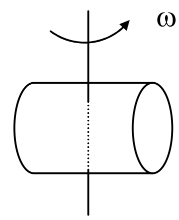
Dönme eylemsizlik momenti I, doğrusal haketetteki m kütlesine özdeştir.

Dönme	***Doğrusal Hareket***
$K = \frac{1}{2} I\omega^2$	$K = \frac{1}{2} mv^2$

I eylemsizlik momenti, cismin hangi eksen etrafında döndürüldüğüne bağlıdır.



I=½MR^2

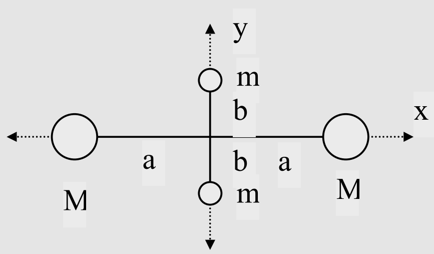


I=MR^2

Örnek 10.4 *Dönen Dörtlü Parçacık:* Dört küçük küresel kütle, xy düzleminde kütlesi ihmal edilebilen bir çerçevenin köşelerine yerleştirilmiştir. Kürelerin yarıçaplarının çerçevenin boyutlarına kıyasla çok küçük olduğu varsayılıyor.

a) Sistem, w açısal hızı ile y ekseni etrafında dönerse bu eksene göre eylemsizlik momentini ve dönme kinetik enerjisini bulunuz.
b) Sistemin O'dan geçen bir eksen (z-ekseni) etrafında xy düzleminde döndügünü varsayalım. Z eksenine göre eylemsizlik momentini ve dönme kinetik enerjisini bulunuz.

Çözüm:



a) $I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$

$$K_{Dy} = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

b)

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_{Dz} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

$$K_{Dz} = K_{Dy} + K_{Dx}$$

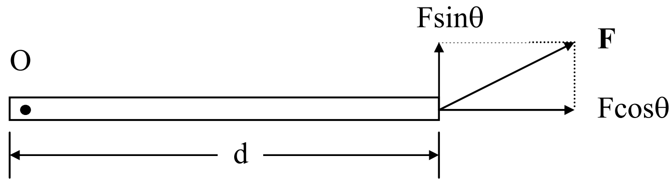
10-6 Tork

Bir **F** kuvvetinin bir cismi bir eksen etrafında döndürme etkisi tork (τ) ile ifade edilir (Tork ile Moment aynı kavramlardır; moment ile momentum farklı kavramlar olup birbiri ile karıştırılmamalıdır, Bkz Bölüm 9). Kuvvet ile kuvvetin uygulandığı nokta ile dönme ekseni arasındaki uzaklık yani kuvvet kolu arasındaki açı dik ise tork

Tork=(kuvvet)x(kuvvetin uygulandığı nokta ile dönme ekseni arası uzaklık, kuvvet kolu)

$$\tau = Fd$$

şeklinde tanımlanır. Eğer uygulanan kuvvet ile kuvvet kolu arasındaki açı 90^{o}' den farklı ise:



Fcosθ: dönme hareketine katkıda bulunmaz
Fsinθ: dönme hareketini sağlar

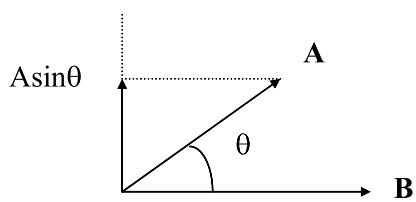
$$\tau = F\sin\theta . d$$

şeklinde yazılır. Torku hesaplarken kuvvetin kuvvet koluna dik bileşeni alınır (iş ifadesinde kuvvetin paralel bileşeni alınır)

İki Vektörün Vektörel Çarpımı:

İki vektörün vektörel çarpımı yine bir vektörel niceliktir. Dolayısı ile sonuç vektörün hem büyüklüğü hemde bir yönü olacak.

Aralarındaki açı θ olan **A** ve **B** gibi iki vektör olsun.

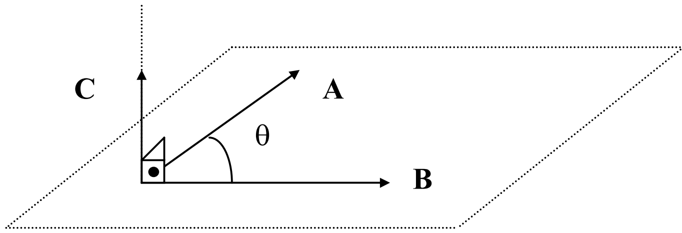


Bu iki vektörün vektörel çarpımı **C** gibi bir vektör verecektir.

Ax**B**=**C**

C vektörel olduğundan:

> **C** vektörünün büyüklüğü, |**A**x**B**|=|**C**|=|**A**|.|**B**|.sinθ
> **C** vektörünün yönü ise, **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir.



Eğer **A** ve **B** vektörleri üç boyutta birim vektörler cinsinden tanımlanmış ise;

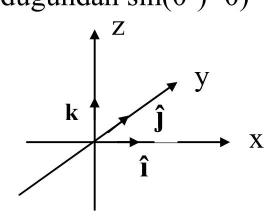
$\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\mathbf{k}$
$\mathbf{B}=B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\mathbf{k}$

Bu iki vektörün vektörel çarpımının ne olacağını bulmaya çalışırsak:

$$\begin{aligned}\mathbf{AxB}=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\mathbf{k})\mathbf{x}(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\mathbf{k})= &\ A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}})+A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}})+A_xB_z(\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\mathbf{k})\\ &+A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}})+A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}})+A_yB_z(\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\mathbf{k})\\ &+A_zB_x(\mathbf{k}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}})+A_zB_y(\mathbf{k}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}})+A_zB_z(\mathbf{k}\mathrm{x}\mathbf{k})\end{aligned}$$

Birim vektörlerin (**î, ĵ ve k**) vektörel çarpımlarına bakacak olursak:

$\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}}=\mathbf{k}\mathrm{x}\mathbf{k}=0$ (Aynı birim vektörler arasındaki açı $\theta=0^o$ olduğundan $\sin(0^o)=0$)
$\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}}=\mathbf{k}$
$\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\mathbf{k}=\hat{\mathbf{i}}$
$\mathbf{k}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}$
$\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}}=-\mathbf{k}$



$$\begin{aligned}\mathbf{AxB}=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\mathbf{k})\mathbf{x}(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\mathbf{k})= &\quad 0 \quad + A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}}) +A_xB_z(\hat{\mathbf{i}}\mathrm{x}\mathbf{k})\\ &+A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}}) + \quad 0 \quad +A_yB_z(\hat{\mathbf{j}}\mathrm{x}\mathbf{k})\\ &+A_zB_x(\mathbf{k}\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}}) +A_zB_y(\mathbf{k}\mathrm{x}\hat{\mathbf{j}})+ \quad 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{AxB}=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\mathbf{k})\mathbf{x}(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\mathbf{k})=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\mathbf{i}}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\mathbf{j}}+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}$$

bulunur.

Vektörek çarpım notasyonunu kullanarak tork ifadesini, **F** ve **d** vektörlerin vektörel çarpımı olarak ifade edebiliriz.

$$\tau=\mathbf{F}\mathrm{x}\mathbf{d}$$

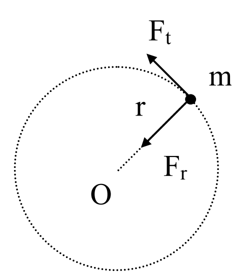
10-7 Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağıntı

Teğetsel kuvvet $\mathbf{F_t}$, ve teğetsel ivme ($\mathbf{a_t}$) arasındaki ilişki, Newton'un 2. yasasından.

$$\mathbf{F_t}=m\mathbf{a_t}$$

F_t kuvvetinin merkeze göre uyguladığı tork ($\theta=90^o$) olduğundan

$$\tau=F_t.r=ma_tr$$



$\tau=F_t.r$

Teğetsel ivme açısal ivmeye $a_t=r\alpha$ eşitliği ile bağlı olduğundan;

$$\tau = (mr\alpha).r = mr^2\alpha$$

$I = mr^2$ olduğu hatırlanırsa, burdan

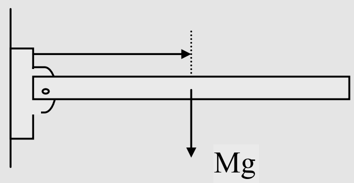
$$\tau = I\alpha$$

Bulunur. Bu eşitlik, Newton'un doğrusal hareket için türettiğimiz **F**=m**a** hareket kanununa benzemektedir.

Doğrusal	***Dönme***
m	I
a	α
F	τ

Örnek 10.10 *Dönen Çubuk:* Uzunluğu L, kütlesi M olan düzgün bir çubuk, şelildeki gibi bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecek durumdadır. Çubuk yatay durumda iken serbest bırakılıyor. Çubuğun ilk açısal ivmesi ve sağ ucunun ilk çizgisel ivmesi nedir?

Çözüm:



$\tau = F.d$

$\tau = Mg(L/2)$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(\frac{L}{2})}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Bölüm 10'un Sonu

Kaynak:

Bu ders notları,
R. A. Serway ve **R. J. Beichner** (Çeviri Editörü: K. Çolakoğlu), **Fen ve Mühendislik için FİZİK-I** (Mekanik), Palme Yayıncılık, 2005.

kitabından derlenmiştir.