Yıldızların Yapısı ve Evrimi

Virial Teoremi

Isı Enerjisi

Hidrostatik denge konusunda gördüğümüz en önemli olay M kütlesinde ve R yarıçapındaki bir yıldız eğer dengede ise iç bölgede belirli bir sıcaklığın olması gerekir.

Sıcaklık düşük olursa basınç çekim kuvvetini dengeleyemeyecektir. Eğer sıcaklık büyük olsaydı bu kez yarıçap büyüyecekti.

Buradan hareketle sıcaklığın hidrostatik denge koşuluyla oluşturulduğunu biliyoruz.

Isı Enerjisi

Şimdi yıldızın içinde ısı ve çekim enerjisi arasındaki ilişkiye bakalım.

Bir gaz içindeki ısı enerjisi parçacık başına

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT \qquad \text{<1>}$$

Şeklindeki kinetik enerji ile bulunur. Burada k Boltzmann sabiti $k=1.38\ 10^{-16}$ erg/der. Yine hareketli bir parçacığın kinetik enerjisi

Isı Enerjisi

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$ <2>

Hareketin üç boyutlu olduğunu gözönüne alırsak

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT$$ <3>

Burada $m=\mu\, m_H$ olup parçacığın ortalama kütlesi, m_H ise hidrojen atomunun kütlesidir. $n=\rho/m$ cm^3'deki parçacık sayısı olmak üzere cm^3'deki ısısal kinetik enerji,

Isı Enerjisi

$$E_{ısı} = n\frac{3}{2}kT$$ <4>

Merkezden r uzaklığında $dV=4\pi r^2 dr$ hacmındaki her kütle kabuğu için ısısal kinetik enerji,

$$\Delta E_{ısı} = 4\pi r^2 dr\, n\frac{3}{2}kT$$ <5>

Ve yıldızın tümü için toplam enerji,

$$\boxed{E_{ısı} = \int_0^R \frac{3}{2}kT\,n\,4\pi r^2\,dr}$$ <6>

Isı Enerjisi

Gaz basıncı için P_g = nKT bağıntısını kullanarak ısı enerjisini

$$\boxed{E_{ısı} = \int_0^R \frac{3}{2} P_g \, 4\pi r^2 \, dr} \quad <7>$$

şeklinde yazabiliriz. Gaz basıncı hidrostatik denge denkleminin integrasyonundan bulunabilir.

$$\boxed{\frac{dP_g}{dr} = -\rho \, g(r) = -\rho \frac{GM_r}{r^2}} \quad <8>$$

Isı Enerjisi

Bu denklemin her iki tarafını ($P_g 4\pi r^3 dr$) ile çarpıp r=0 dan r=R'ye integre edelim

$$\int_0^R \frac{dP_g}{dr} 4\pi r^3\, dr = -\int_0^R \rho \frac{GM_r}{r^2} 4\pi r^3 dr = -\int_0^R \rho \frac{GM_r}{r} 4\pi r^2 dr$$ <9>

Sol tarafın parçalı integrali

$$\int_0^R \frac{dP_g}{dr} 4\pi r^3 dr = \left[P_g\, 4\pi r^3\right]_0^R - \int_0^R 3P_g\, 4\pi r^2 dr = -\int_0^R 3P_g\, 4\pi r^2 dr$$ <10>

Sonuç = $\boxed{-\int_0^R 3P_g\, 4\pi r^2 dr = -\int_0^R \rho \frac{GM_r}{r} 4\pi r^2 dr}$ <11>

Isı Enerjisi

Denklemin sol tarafı ısı enerjisinin iki katı olduğunu görelim

$$2E_{ısı} = -\int_0^R \rho \frac{GM_r}{r} 4\pi r^2 dr \qquad \text{<12>}$$

Unutmayalım ki bu denklem $P_g(r)$, $M(r)$ ve $\rho(r)$'nin ne olduğu bilinmeden hidrostatik denge denkleminden çıkartılmıştır. Şimdi denklemin sağ tarafını inceleyelim.

Çekim Enerjisi

Yıldız oluşurken $\Delta m=\rho 4\pi r^2 dr$'lik bir kütle elemanının r yarıçapındaki M_r üzerine düşmesiyle ortaya çıkacak çekim enerjisi

$$\Delta E_{çekim} = \int_{\infty}^{r} kuvvet\ ds$$ <13>

Çekim ivmesi ise $g(s)=GM_r/s^2$ dir.

$$\Delta E_{çekim} = \int_0^r g(s)\,\Delta m\,ds = \int_0^r \frac{GM_r}{s^2}\rho\,4\pi\,r^2\,dr\,ds$$ <14>

Bu integrali alırsak

Çekim Enerjisi

$$\Delta E_{çekim} = \left[-\frac{GM_r}{s} \right]_{\infty}^{r} \rho 4\pi r^2 dr = -\frac{GM_r}{r} \rho 4\pi r^2 dr \qquad \text{<15>}$$

Yıldızı oluşturan tüm kütle elemanları boyunca integre edersek

$$E_{çekim} = \int_0^R \frac{GM_r}{r} \rho 4\pi r^2 dr \qquad \text{<16>}$$

Bu ifade ise <12> denkleminin sağ tarafı ile aynıdır.

$$\boxed{E_{ısı} = -\frac{1}{2} E_{çekim}} \qquad \text{<17>}$$

Virial Teoremi

Bu bağıntı herhangibir yaklaşım ($E_{ısı}=E_{kin}$ dışında) yapmadığımız için bu bağıntı eğer yıldız hidrostatik dengede ve ideal gaz durumunda ise her $P_g(r)$, $T(r)$ ve $M(r)$ için geçerlidir. Bu bağıntıya Virial Teoremi denir.

Bu bağıntının en önemli sonucu yıldız gelişiminin ilk evreleridir. Yıldız büzülmeye başladığında açığa çıkan çekim enerjisi ısı enerjisine dönüşür.

Virial Teoremi

Açığa çıkan çekim enerjisinin yarısı ısı enerjisine dönüştüğünde yıldız hidrostatik dengeye ulaşır. Daha fazlası dönüşürse bu kez içyapıda sıcaklık artar, denge bozulur ve yıldız genişler. Denge kurulana kadar yıldız soğumak zorunda kalır. Yıldız ısısal enerjisinin bir bölümünü ışınım olarak yüzeyden salar, dolayısıyla sıcaklık düşer ve çökme devam eder. Bu büzülme sürecinde açığa çıkan çekim enerjisinin yarısı ışınım enerjisi olarak salınır.

Virial Teoremi

Yıldız anakol yıldızı olana kadar büzülmesi ne kadar zaman alır? İçerdeki fazla ısının yıldızı terketmesine izin verecek kadar uzun zaman alır. İçeriden dışarıya doğru ısı enerjisi ışınımla taşınıyorsa , ışınım yolunu bulana kadar devam eder.

Örneğin Güneş'in saniyede enerji kaybı $L=4*10^{33}$ erg/s'dir. Güneşin serbest bırakılan çekim enerjisi <16> denklemi ile verilir. Sabit yoğunluklu bir yıldız için

Virial Teoremi

$M_r = 4/3\ \pi\ r^3\ \rho$ ile verilir. <16> denklemi

$$E_{\Theta çekim} = \int \rho^2 \frac{16}{3} \pi^2 G r^4 dr = -\rho^2 G \frac{16}{15} \pi^2 R^5 = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Güneş'in kütlesi için $M_\Theta = 2*10^{33}$ gr, yarıçapı için $R_\Theta = 7*10^{10}$ cm alırsak

$$E_{\Theta çekim} = \frac{2.4*10^{66}}{7*10^{10}} G = 2.4*10^{48} erg$$

Güneş büzülürken bu enerjinin yarısını ışınımla kaybetmiş olmalıdır. Onun şimdiki ile aynı ışıdığını varsayarsak büzülme zamanı olarak,

Kelvin-Helmholtz Zamanı

$$t = \frac{1.2 * 10^{48}}{4 * 10^{33}} s = 3 * 10^{14} s$$

Yani 10^7 yıl buluruz. Yani Güneş'in büzülmesi 10 milyon yıl almış olmalıdır. Yıldızlar için bu büzülme zamanına Kelvin-Helmholtz zamanı denir.

Fotonun içeriden dışarıya doğru olan yolculuğuna bakalım. Büyük kütleli yıldızlarda bu zaman daha kısadır.

Virial Teoremi

Hidrostatik denge ve kütle sürekliliği denklemlerinden bir başka sonuca daha gitmek mümkündür.

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2}} \qquad \boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho}$$

$$4\pi r^3 dP = -4\pi r G M \rho\, dr = -(GM/r) dM$$

Tüm yıldız üzerinden integre edersek

$$3\int_{P_m}^{P_y} V\, dP = -\int_0^{M_y} (GM/r)\, dM$$

Sol taraftaki parçalı integrali alırsak

$$3[PV]_m^y - 3\int_0^{V_y} P\, dV = -\int_0^{M_y} (GM/r)\, dM$$

Virial Teoremi

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho}$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \; dV = 4\pi r^2 dr \; \Rightarrow dM = \rho\, dV}$$

dV yerine dM'li ifadeyi yazalım, $V_m=0$.

$$\boxed{3[PV]_m^y - 3\int_0^{V_y} P\,dV = -\int_0^{M_y} (GM/r)\,dM}$$

$$\boxed{4\pi r_y^3 P_y - 3\int_0^{M_y} \frac{P}{\rho} dM = -\int_0^{M_y} (GM/r)\,dM}$$

Ω

Sonuç $$\boxed{4\pi r_y^3 P_y = 3\int_0^{M_y} \frac{P}{\rho} dM + \Omega}$$ Virial Teoremi

Eğer yıldız bir boşluk ile çevrili ise $P_y=0$ ve denklemin sol tarafı 0 olurdu. Yüzey basıncı sıfır değil ama merkez basıncı ile karşılaştırıldığında çok küçüktür, boşlanabilir

Yıldız Maddesinin Fiziksel Durumu

Sıcaklık yüksek katı olamaz.
Yoğunluk yüksek gaz halinde olamaz.
Tartışmalar bitti ve yıldız ideal bir gaz.
Bu iyonize olmuş bir gaz yani plazma.
En sıkı bağlı elektronlar hariç atomlarından ayrı.
Çekirdek boyutu 10^{-18}cm atom 10^{-13}cm.
O zaman yüksek yoğunluk açıklanabilir.
Çekirdek ve elektronlar arasındaki kuvvet.
Işınım şiddeti yıldız maddesi ile ısısal dengede
Fotonlarda bir basınç uygular, gazlar gibi.
Işınım basıncı gaz basıncı kadar önemli değil.

İdeal Gaz

Gazların kinetik teorisinden ideal gaz basıncı

$$P_{gaz} = nkT \qquad k = 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$$

Işınım basıncı ise şu formül ile verilir.

$$P_{ışınım} = \frac{1}{3} a T^4 \qquad a = 7.55 \times 10^{-16}\ Jm^{-3}K^{-4}$$

Burada a, ışınım yoğunluğu sabitidir.

Bir Yıldızın Ortalama Sıcaklığı

Virial teoreminin sağ tarafı negatif çekimsel potansiyel enerjisi olduğunu biliyoruz

$$\boxed{-\Omega = \int_0^{M_y} \frac{GM}{r}\,dm}$$

Bu integralde r yıldızın içindeki her yerde r_y'den küçüktür. O zaman 1/r de $1/r_y$'den büyüktür.

$$\boxed{-\Omega > \int_0^{M_y} \frac{GM}{r_y}\,dM = \frac{GM_y^2}{2r_y}}$$

Eğer yıldız, ışınım basıncı boşlanabilen ideal gazdan oluşmuş varsayarsak Virial teoreminin diğer terimi şu şekli alır.

Bir Yıldızın Ortalama Sıcaklığı

$$3\int_0^{M_y} \frac{P}{\rho} dM = 3\int_0^{M_y} \frac{kT}{m} dM = \frac{3k}{m} M_y \overline{T}$$

Burada ρ=nm'dir ve m, yıldız maddesindeki parçacıkların ortalama kütlesidir ve $\overline{T}$,

$$M_y \overline{T} = \int_0^{M_y} T\, dM$$

Eşitliği ile tanımlanan ortalama sıcaklıktır. Şimdi çıkarttığımız üç denklemi göz önüne alalım

$$4\pi r_y^3 P_y = 3\int_0^{M_y} \frac{P}{\rho} dM + \Omega$$

$$-\Omega > \int_0^{M_y} \frac{GM}{r_y} dM = \frac{GM_y^2}{2r_y}$$

$$3\int_0^{M_y} \frac{P}{\rho} dM = 3\int_0^{M_y} \frac{kT}{m} dM = \frac{3k}{m} M_y \overline{T}$$

Bir Yıldızın Ortalama Sıcaklığı

$$3\int_0^{M_y}\frac{P}{\rho}dM = -\Omega > \frac{GM_y^2}{2r_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{3k}{m}M_y\overline{T} > \frac{GM_y^2}{2r_y}$$

$$\overline{T} > \frac{GM_y^2}{2r_y}\frac{m}{3kM_y}$$

$$\overline{T} > \frac{GM_y m}{6kr_y}$$

Bu ifadeye Güneş'in değerlerini yazarsak ve m'i hidrojenin kütlesi cinsinden yazarsak

$$\overline{T}_{\odot} > 4\times10^6\left(m/m_H\right)\ {}^\circ K$$

Parantez içindeki ifadeyi bilmemiz gerekir. İleride göreceğiz iyonize hidrojen için bu değer 0.5 dir.

Bir Yıldızın Ortalama Sıcaklığı

O zaman Güneşin ortalama sıcaklığı

$$\boxed{\overline{T}_{\odot} > 2\times 10^{6}\ {}^{\circ}K}$$

Bu sıcaklık çok yüksek, yorumla. Güneşin ortalama yoğunluğu ise,

$$\boxed{\overline{\rho}_{\odot} = \frac{M_{\odot}}{V_{\odot}} = \frac{3M_{\odot}}{4\pi r_{\odot}^{3}} \cong 1.4\times 10^{3}\ kg\, m^{-3}}$$

Bu yoğunluk ve sıcaklıkta gazın tamamen iyonize olduğunu söyleyebiliriz. Yoğunluk su ve benzer sıvılarınkinden biraz daha fazladır.

Işınım ve Gaz Basıncı Karşılaştırması

Güneşin içinde örnek bir nokta için ışınım ve gaz basıncını karşılaştırabiliriz.

$$P_{gaz} = nkT \qquad P_{ışınım} = (1/3)\,a\,T^4 \qquad \boxed{\frac{P_{ışınım}}{P_{gaz}} = \frac{aT^3}{3nk}}$$

Burada $\overline{T} = T = 2\text{x}10^6\text{K}$ ve $n = 2\underline{\rho}/m_H = 2\text{x}10^{30}$ Değerleri yerleştirirsek,

$$\boxed{\frac{P_{ışınım}}{P_{gaz}} = 10^{-4}}$$

Buradan anlaşılıyor ki Güneş için ışınım basıncı boşlanacak kadar küçük. Bu durum bir çok yıldızda geçerlidir.