Yıldızların İç Yapısı ve Evrimi

Politropik Denklemlerin Çözümü

Vogt-Russell Teoremi

Yıldız yapısı belirlenirken önce kütlesini ve kimyasal bileşimini belirleriz. Bundan sonra 3 yardımcı denklemi ve daha sonra 4 diferansiyel denklemi çözeriz. Vogt-Russell teoremi eğer yıldızın kimyasal bileşimi ve kütlesi belli ise bu denklem sisteminin yalnız bir çözümü vardır der. Teoremin ispatı yapımamamıştır ve bugün bazı ender durumlarda iki veya daha fazla çözümün mümkün olduğu biliniyor.

Boyutsuz Değişkenler

Temel yapı denklemlerini çözerek her şeyini bildiğimiz referans yıldızı $_0$ indisi ile modelini yapacağımız yıldızı da indissiz gösterelim.

$$\frac{r}{R} = \frac{r_0}{R_0} \quad \rightarrow \quad r = \left(\frac{R}{R_0} \right) r_0 \qquad m = \left(\frac{M}{M_0} \right) m_0 \qquad (23)$$

Her iki tarafın diferansiyelini alırsak

$$\frac{dr}{dr_0} = \frac{R}{R_0} \quad ve \quad \frac{dm}{dm_0} = \frac{M}{M_0} \qquad (24)$$

Bu ifadeler ile yıldızın içinde yoğunluğun nasıl dağıldığını bulabiliriz.

Boyutsuz Değişkenler

Kütle denklemini yazalım ve her iki tarafını son bulduğumuz denklemler ile çarpalım

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \qquad \frac{dr_0}{dr} = \frac{R_0}{R} \qquad \frac{dm}{dm_0} = \frac{M}{M_0}$$

$$\frac{dr}{dm}\left(\frac{dr_0}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dm_0}\right) = \frac{dr_0}{dm_0} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}\left(\frac{R_0}{R}\right)\left(\frac{M}{M_0}\right) = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}$$

düzenlediğimizde,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)\left(\frac{M}{M_0}\right)\left(\frac{r_0^2}{r^2}\right) = \left(\frac{M}{M_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^3$$

Politrop

Bu şekilde her parametre için boyutsuz değişkenler tanımlayarak ve bazı yaklaşımlar yaparak yıldız yapı denklemlerini çözmek olasıdır. Ama ne olursa olsun bilgisayarda sayısal olarak çözmek en doğrusu.

Bu 7 yapı denklemini doğru olarak çözmek birçok gökbilimciyi uğraştırmıştır. Yöntemlerden birini de politrop modeller oluşturmaktır. Daha önce konveksiyon konusunu işlerken kullandığımız bu kavramı şimdi biraz genişletelim.

Politrop

İdeal gaz yasasını biliyoruz.

$$P_g V = NkT \qquad n \equiv \frac{N}{V} \qquad P_g = nkT$$

Burada N, parçacık sayısı, n ise parçacık yoğunluğudur. Astrofizikte gaz yasası bu şekilde kullanılmaz, kütle yoğunluğu kullanılır. Farklı kütlelere sahip parçacıklar varsa o zaman *n* yerine, $n = \frac{\rho}{\overline{m}}$ Kullanırız.

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \qquad (28)$$

Politrop

Adyabatik harekette gazın basıncı ile hacmı arasında şöyle bir bağıntı vardı.

$$PV^{\gamma} = Sabit \qquad \text{veya} \qquad \frac{P}{\rho^{\gamma}} = Sabit \qquad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Burada γ, iki esas özgül ısının oranı olup, adı adyabatik ölçektir. Gaz basıncının bu şekilde ifadesine politropik durum denklemi denir.

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$$

Bu denklem nasıl bu hale geldi?

$$P_g = K \rho^{\gamma}$$

Politrop

γ adyabatik ölçek, *n* politropik ölçeğe şu şekilde bağlıdır.

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \qquad (30)$$

Hidrostatik denge denklemini anımsayalım ve her iki tarafını $r^2\rho(r)$ ile çarpalım.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\,m(r)\,\rho(r)}{r^2} \qquad \frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr} = -G\,m(r) \qquad (31)$$

Her iki tarafın *r*'ye göre diferansiyelini alalım.

Politrop

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -G\frac{dm}{dr} \qquad (32)$$

Sağtaraftaki kütle sürekliliği ifadesini yerine koyalım ve r^2'yi sol tarafa alalım.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \qquad (33)$$

Bu denkleme dikkatle bakarsak basınç gradyenti sadece yoğunluğa bağlıdır. Bu denklemden hareketle meşhur Lane-Emden denklemini elde edebiliriz.

Politrop

Şimdi gaz basıncını politropik ölçek ile yazalım ve her iki tarafın r'ye göre türevini alalım.

$$P_g = K\rho^{\gamma} = K\rho^{\frac{n+1}{n}} \qquad \frac{dP}{dr} = K\frac{n+1}{n}\rho^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho}{dr}$$

Bu ifadeyi önceki denklemde yerine koyalım

$$\left(\frac{(n+1)K}{4\pi nG}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

Politrop

$\rho(r)$ için ikinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü iki sınır değer gerektirir.

$r=R$ için $\rho=0$

$r=0$ için $d\rho/dr = 0$

Bu son sınır değer merkezde net çekim kuvvetinin sıfır olmasından kaynaklanır. Dolayısıyla $dP/dr = 0$'dan hareketle elde edilir. Bu denklemi çözmek için boyutsuz bir değişken tanımlayalım.

Politrop

$\rho = \rho_c \theta^n$ diferansiyeli $d\rho = \rho_c\, n\, \theta^{n-1} d\theta$ (38)

Yerine koyalım

$$\left(\frac{(n+1)K}{4\pi n G}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho_c\, n\, \theta^{n-1} r^2}{(\rho_c \theta^n)^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\theta}{dr}\right) = -\rho_c \theta^n \quad (39)$$

Sadeleştirelim $$\left(\frac{(n+1)K\,\rho_c^{((1/n)-1)}}{4\pi G}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\theta^n \quad (40)$$

$\left(\frac{(n+1)K\,\rho_c^{((1/n)-1)}}{4\pi G}\right) = \alpha^2$ dersek $\boxed{\frac{\alpha^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\theta^n}$ (41)

Politrop

Denklemin sağ tarafı boyutsuz olduğu için sol tarafın da boyutsuz olması gerekir yani α uzunluk birimindedir. Şimdi boyutsuz bir değişen daha tanımlayalım

(42) $r = \alpha\xi$ deferansiyeli $dr = \alpha \, d\xi$

o zaman denklemimiz,

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \qquad (43)$$

Bu ifadeye Lane-Emden denklemi denir.

Politrop

θ'nın boyutsuz değişken ξ'ye göre değişimini verir. Sınır değerlerine bakalım.

$\xi=0$ (yani r=0) için $\theta=1$ (yani r=0'da $\rho=\rho_c$) $d\theta/d\xi = 0$ merkezde çekimin sıfır olması. $\theta=0$ olduğu yerde yani yüzeyde ise $\xi=\xi_R$ alacağız.

Bu denklemde ξ değişkeni yarıçapı gösteren boyutsuz, θ ise (0,1) aralığında değişen ve yoğunlukla ilgili boyutsuz değişen olduğunu unutmayalım. Dolayısıyla L-E denkleminin çözümü bize yarıçapın fonksiyonu olarak yoğunluğu verecektir.

Politrop

Adyabatik koşullar altında ideal gaz yasası

$$P \propto \rho T \qquad ve \qquad P \propto \rho^{\gamma}$$

O zaman, $\rho \propto T^{1/(\gamma-1)} \propto T^{n}$ (44)

θ değişkenini anımsarsak $\rho = \rho_c \theta^n$

Bu durumda θ sıcaklığın bir göstergesi olacak ve boyutsuz ξ'ye göre değişimi verecektir.

Keyfi *n* değerleri için bu denklemin sayısal çözümü vardır, analitik çözümü yoktur.

Politrop

Lane-Emden denkleminin belirli *n* değerleri için ise analitik çözümü vardır, sadece $n=0,1,5$ değerleri için.

$n=0$ sabit yoğunluğu gösterir. $n=0$ için $\theta^n=1$ ve $\rho=\rho_c\theta^n$ den dolayı $\rho=\rho_c$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)=-1$$

İntegralini alırsak

$$\frac{d\theta}{d\xi}=-\frac{\xi}{3}+\frac{C}{\xi^2}$$

$\xi=0$ da $d\theta/d\xi=0$ ikinci sınır koşulu gereği $C=0$. Tekrar integralini alırsak

$$\theta=\frac{-\xi^2}{6}+C_2$$

Birinci sınır koşulu

$$\theta=1-\frac{\xi^2}{6}$$

Politrop

n=1 için L-E denklemi şu şekli alır.

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+\theta=0$$

Bu denklemi çözmek için yeni değişken tanımlamalıyız. $\chi=\theta\xi$ o zaman denklem,

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-\chi}{\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\chi}{d\xi} \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2}=\frac{2\chi}{\xi^3}-\frac{2}{\xi^2}\frac{d\chi}{d\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{d^2\chi}{d\xi^2}$$

O zaman yukarıdaki denklemi şu hale gelir.

$$\frac{1}{\xi}\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\frac{\chi}{\xi}=0$$

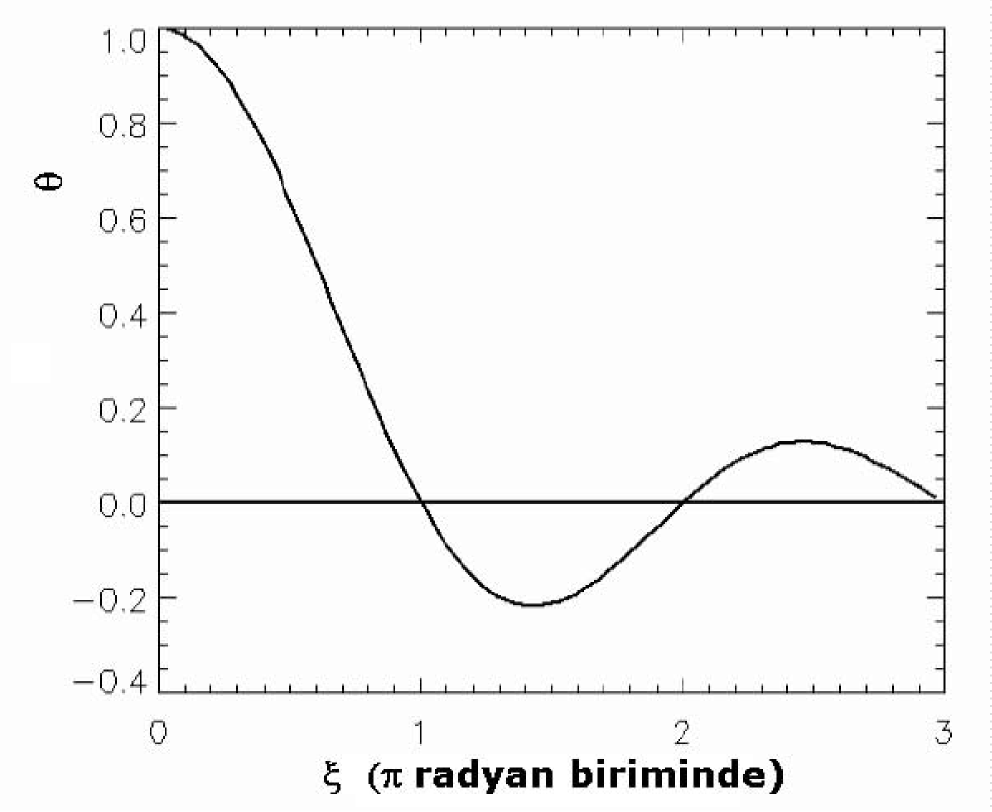
Politrop

Bu denklem $\chi = \sin\,\xi$ koyarak çözülür. O zaman,

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

Grafik olarak,

$\xi = \pi$ de $\theta = 0$ bu ise yıldızın yüzeyi demektir. Ondan sonraki değerlerin fiziksel anlamı yoktur.



Politrop

r=αξ değişken dönüşümünü anımsayalım. Burada α,

$$\alpha = \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{(1-n)}{2n}} \qquad (49)$$

n=1 için yıldızın yarıçapı bulunmuş olur.

$$R_* = \alpha\pi = \left(\frac{2K}{4\pi G} \right)^{1/2} \pi \qquad (50)$$

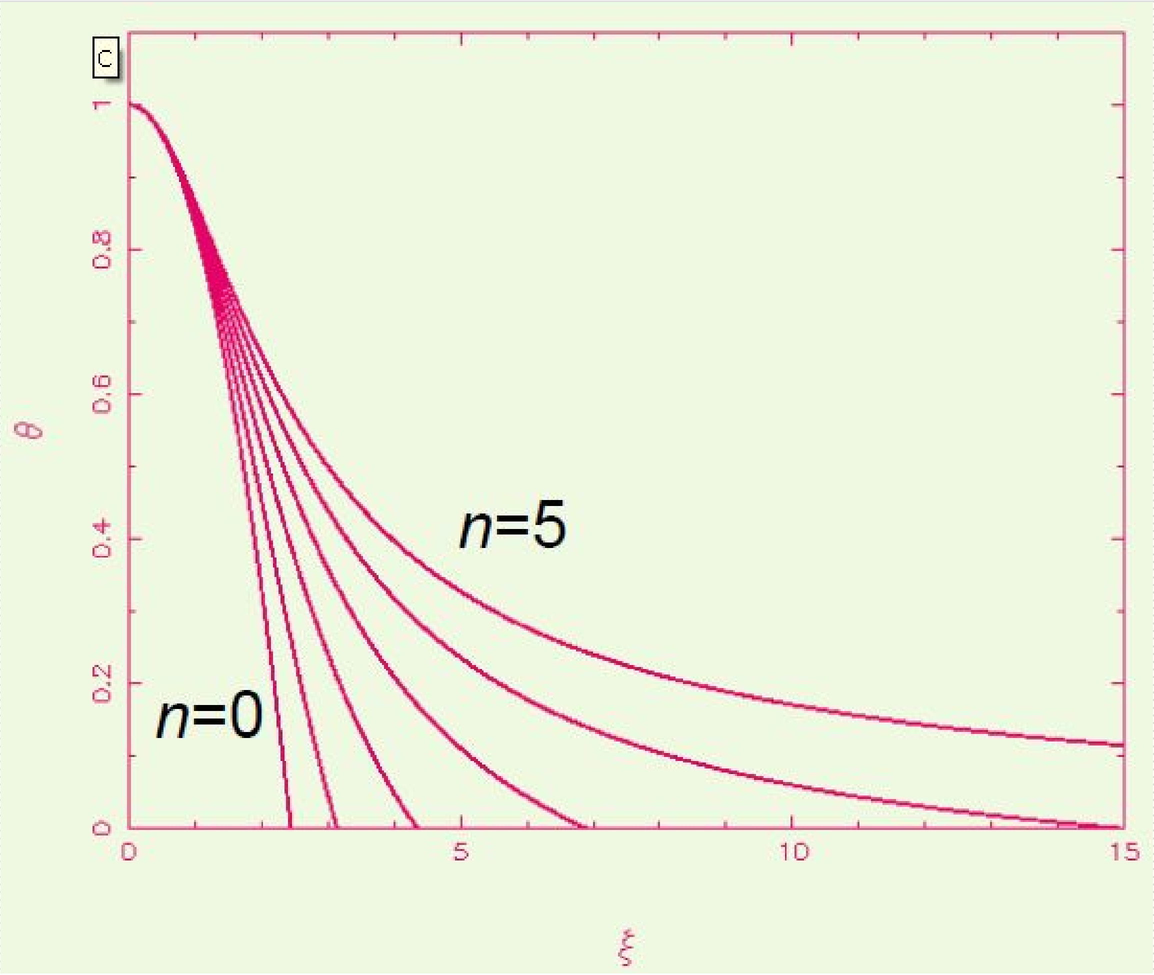
$n = 5 \quad için \quad \theta = \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-1/2}, \qquad \xi_R = \infty$ olur.

Politrop

L-E denkleminin $n=0$ çözümünde $\rho=\rho_c$ çıkıyor bu durum ancak dünya benzeri bir gezegenin iç yapısı için kaba bir yaklaşımdır.

Son çözüm $n=5$ de ise $\xi_R=\infty$ çıktığına göre bu yıldızın yarıçapı sonsuz demektir!. $n>5$ için tüm çözümlerde yarıçapın sonsuz çıkacağı gösterilebilir. Bunun anlamı sadece $n<5$ için yıldızın yüzeyi vardır. Normal yıldızlar için sadece iki ilginç çözüm vardır $n=1.5$ ve $n=3$ ve n'nin bu değerleri içinde analitik çözüm yoktur.

Politrop



n=0,1,2,3,4,5 için sayısal çözümler sol tarafta. Analitik çözümle kıyaslayın.

$$n=0, \qquad \theta = 1 - \left(\frac{\xi^2}{6}\right)$$

$$n=1, \qquad \theta = \frac{\sin\xi}{\xi}$$

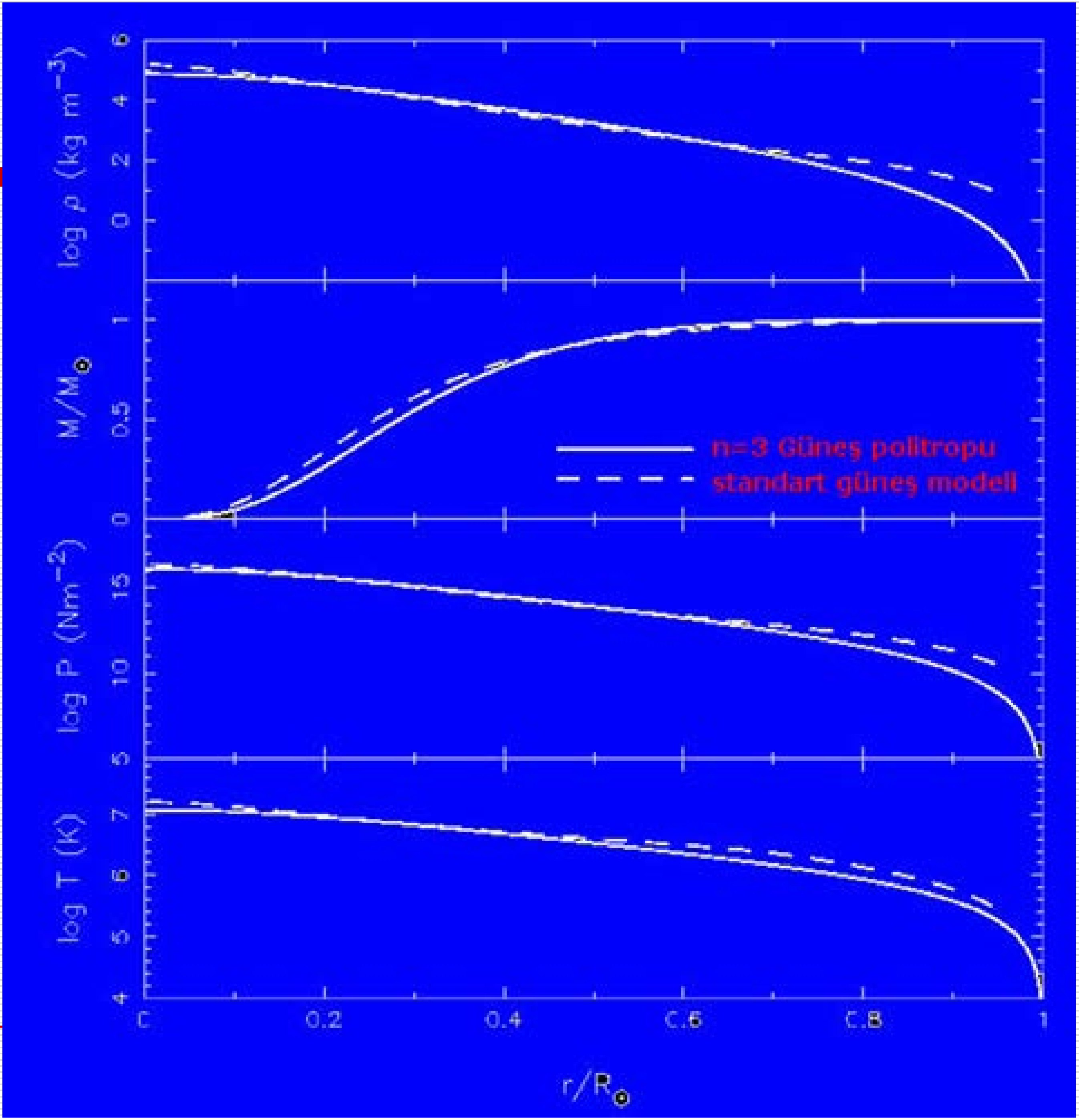
$$n=5, \qquad \theta = \frac{1}{\left(1+\xi^2/3\right)^{0.5}}$$

Politrop

L-E denkleminin sayısal çözümlerinin sonuçları çizelgede görülmektedir. (52)

n	ξ_R	$-\left(\dfrac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_R}$
0	2.45	3.33×10^{-1}
1	3.14	1.01×10^{-1}
2	4.35	2.92×10^{-2}
3	6.90	6.14×10^{-3}
4	15.00	5.33×10^{-4}

Politrop



log ρ (kg m^{-3})
M/M$_\odot$
log P (Nm^{-2})
log T (K)
n=3 Güneş politropu
standart güneş modell
r/R$_\odot$

Politrop

L-E denklemi sadece bir parametreye yani politropik ölçeğe yani *n*'ye bağlıdır. Verilen bir n için yıldızın iç yapısının modeli oluşturulmuşsa o zaman boyutsuz iki ölçeklendirilmiş parametre iç yapıyı fiziksel birimlerle göstermeli. Yani *K*'ya ρ_c'ye *M*'ye *R*'ye bağlı olmalı. Eğer belirli bir *n* için L-E denkleminin sayısal veya analitik çözümü biliyorsak yıldızın kütlesini ve yarıçapını şu şekilde gösterebiliriz.

Politrop

$$R_* = \alpha\xi_R = \left(\frac{K}{G}\frac{n+1}{4\pi}\right)^{1/2}\rho^{\frac{1-n}{2n}}\xi_R \qquad \theta = 0 \text{ için } \xi = \xi_R \text{ olduğunu unutmayalım}$$

$$M_* = \int_0^{R_*} 4\pi r^2 \rho\, dr = 4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi_R} \xi^2\theta^n d\xi$$

$$M_* = 4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi_R}\left[-\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)\right]d\xi$$

$$M_* = 4\pi\left[\frac{K}{G}\frac{n+1}{4\pi}\right]^{3/2}\rho_c^{\frac{3-n}{2n}}\left[-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_R}$$

Bu şekilde elde edilen R ve M ifadelerini birleştirelim ve ortalama yoğunluğu bulalım.

$$R^{\frac{3-n}{n}} M^{\frac{n-1}{n}} = \frac{K}{GN_n} \qquad burada \qquad N_n = \frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1}\left(\left[-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_R}\right)^{\frac{1-n}{n}}\xi_R^{\frac{n-3}{n}}$$

Politrop

$$R^{\frac{3-n}{n}} M^{\frac{n-1}{n}} = \frac{K}{GN_n} \qquad burada \quad N_n = \frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1} \left(\left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R} \right)^{\frac{1-n}{n}} \xi_R^{\frac{n-3}{n}}$$

Burada N_n boyutsuz sadece n'ye bağlı. O zaman yıldızın ortalama yoğunluğunu da hesap edebiliriz.

$$\rho_{ort} \equiv \frac{3M}{4\pi R^3} = \rho_c \frac{3}{\xi_R^3} \left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R}$$

Ayrıca merkezi basıncı da hesaplayabiliriz

$$P_c = K \rho_c^{\frac{n+1}{n}} = W_n \frac{GM}{R^4} \quad \text{burada} \quad W_n = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{\rho_c}{\rho_{ort}} \right)^{\frac{n+1}{n}} N_n$$