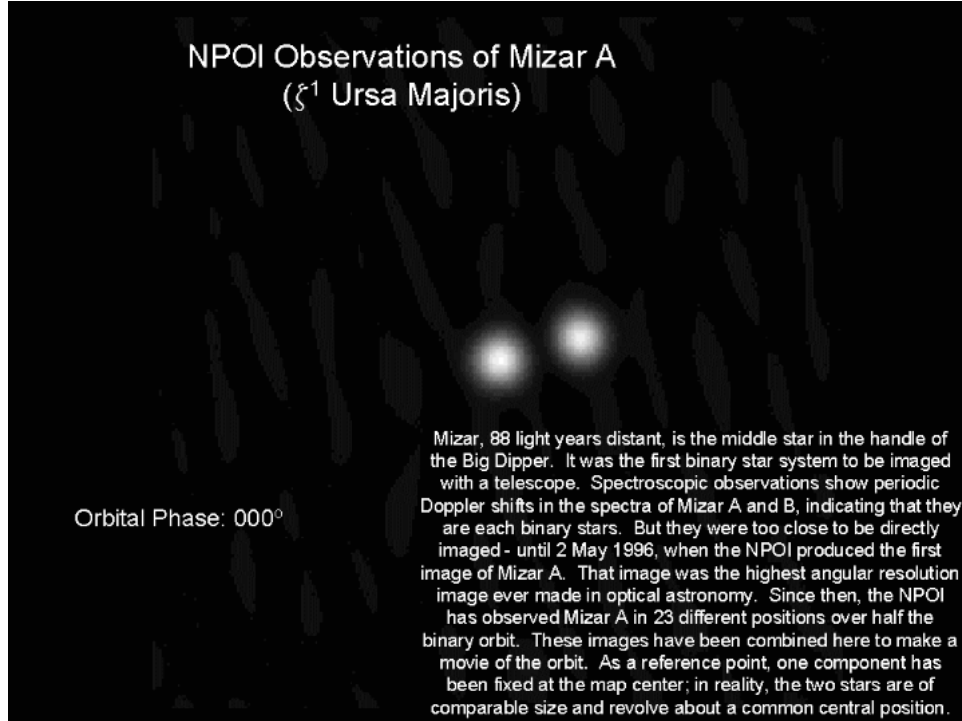


3. NEDEN ÇİFT YILDIZLARI İNCELİYORUZ

Çift yıldızlar, Newton yasalarına göre birbirlerine çekimsel etkide bulunan ve Kepler yasalarına göre ortak kütle merkezi etrafında hareket eden yıldız sistemleridirler ($M_1/M_2=r_2/r_1$). Bileşen yıldızların birbirlerine olan uzaklıkları değme durumundan yüzlerce Astronomi Birimine kadar uzanabilmektedir.

- Kütleleri hesaplanabilen sistemler olmaları ve kütlelerin yıldız evrimine ilişkin temel parametre olması,
- Yıldızların çoğunun çift ve çoklu sistemler olmaları,
- Önemli fiziksel süreçlerin meydana geliyor olması: yıldız rüzgârları, disk yapıları, kütle aktarımı gibi,
- Bileşen yıldızların birbirlerinin evrimini etkiliyor olmaları,
- Fiziksel parametrelerin belirlenebilmesi nedeniyle uzaklıklarının belirlenebilmesi,
- Kütle-Işınım gücü ve Kütle-Yarıçap bağıntılarının oluşturulmasında kullanıldıkları için,
- Yıldızların evrimlerine ilişkin araştırmaların yürütülmesinde kullanıldıkları,
- Yıldızların içyapılarına ilişkin modellerin oluşturulmasında kullanıldıkları

için önemlidirler.



Şekil 3.1. Mizar A'nın yörüngesel hareketi. 88 ışık yılı uzaklıkta bulunan bir sistemdir.

Gözlemsel Açıdan Çift Yıldızların Sınıflaması

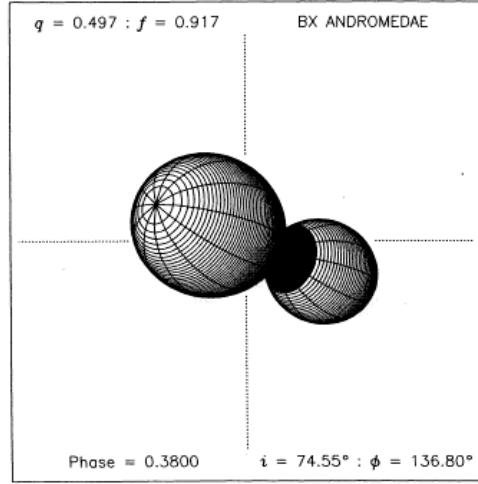
Çift yıldızlar temel olarak keşfedilme yöntemlerine göre sınıflandırılırlar:

- *Görsel Çift Yıldızlar*: Göz, fotoğraf, interferometre, fotoelektrik gibi yöntemlerle bileşen yıldızların ayrı ayrı görülebildiği sistemlerdir.

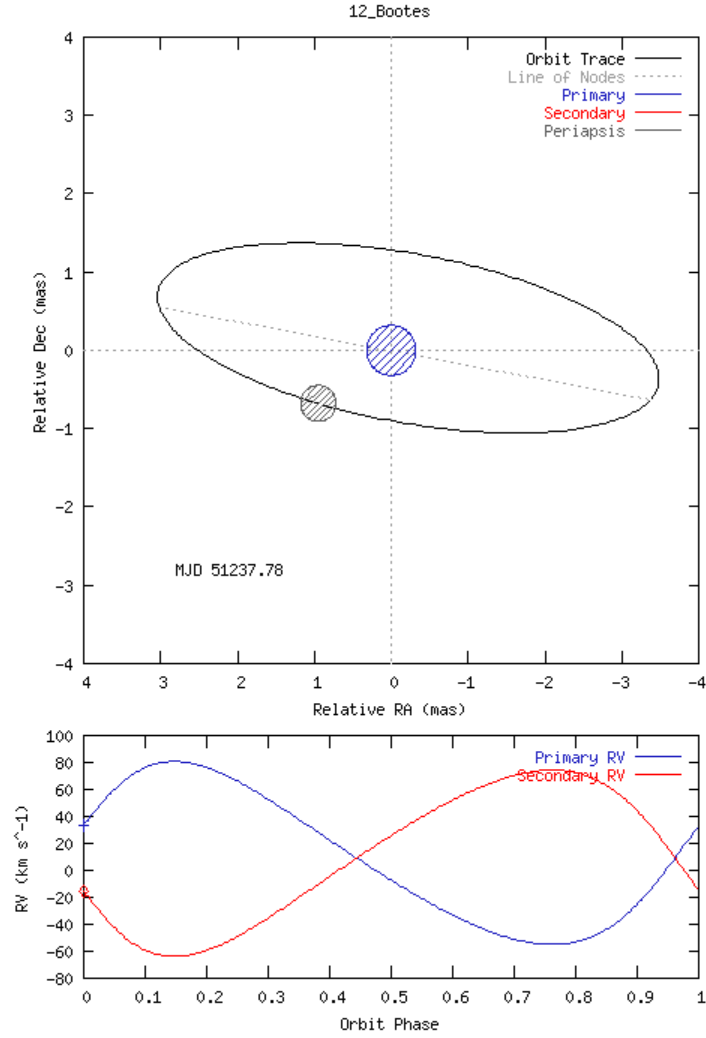
- *Tayfsal Çift Yıldızlar*: Tayflarındaki çizgilerin gösterdikleri değişken dikine hızlardan bulunan sistemlerdir.
- *Tayfsal Çift Yıldızlar 2*: İki veya daha fazla yıldızla ilişkin tayfsal çizginin gözlenebildiği sistemlerdir. Fakat tayflarındaki çizgilerde dönemli değişim görülmez. Simbiyotik yıldızlar olarak adlandırılırlar. Tayflarında genel olarak aynı anda hem sıcak ve hem de soğuk yıldızın varlığına ilişkin izler bulunur.
- *Fotometrik Çift Yıldızlar*: Bileşen yıldızların birbirlerini örtmeleri nedeniyle ışınımındaki değişimden bulunan sistemlerdir.
- *Astrometrik Çift Yıldızlar*: Yıldızların yörüngesel hareketleri nedeniyle uzay hareketlerinde gözlenen doğrusal olmayan veya dönemli değişimlerden ortaya çıkarılan sistemlerdir.
- *Ay Örtmesi ile Bulunan Çift Yıldızlar*: Ay diskinin yıldız örtmesi sırasında ortaya çıkan difraksiyon (girişim) yapılarından ortaya çıkarılan sistemlerdir.
- *Ortak Öz Harekete Sahip Çift Yıldızlar*: Birbirlerinden çok uzakta bulunan çift yıldızların ortak olarak uzay hareketlerinden ortaya çıkarılan sistemlerdir.



Şekil 3.2. Görsel çift yıldız örneği. Albireo (β Cygni). Mavi (sıcak) ve Kırmızı (soğuk) bileşenli bir sistem.



Şekil 3.3. Örtün değişen çift yıldız sistemi BX And.



Şekil 3.4. Hareketli görüntü. Tayfsal çift yıldız örneği.

Fiziksel Sınıflandırma: Shade'nin Evrimsel Sınıflandırması

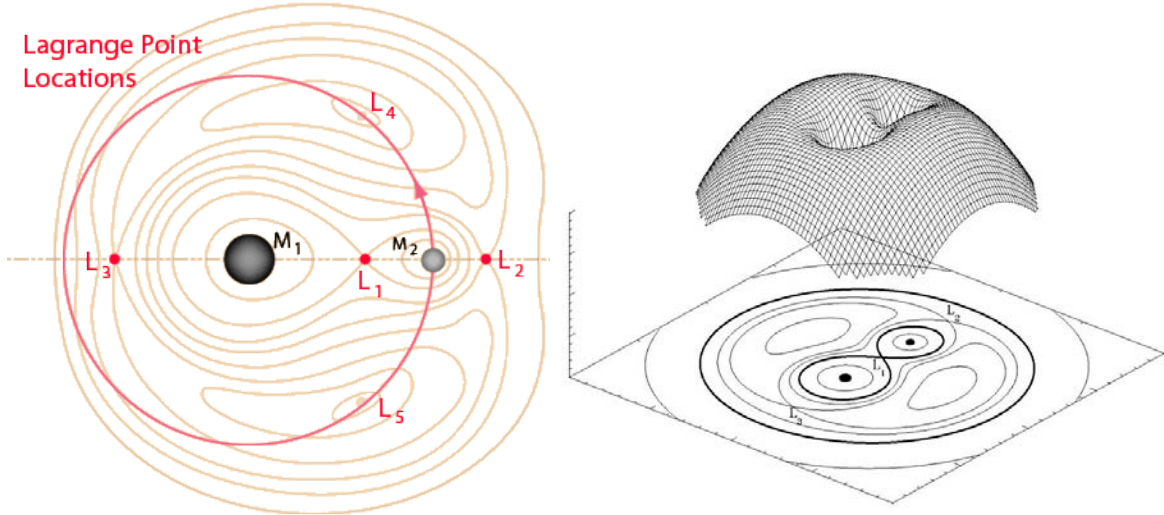
- Tip I: En azından bileşenlerden biri anakol öncesi olan sistemler
- Tip II: Her iki bileşeni anakolda bulunan sistemler
 - Benzer tayf türüne sahip olanlar
 - Farklı tayf türüne sahip olanlar
- Tip III: Bileşenlerden birinin anakolda diğerinin ise III veya IV ışınım sınıfında olanlar
- Tip IV: Her iki bileşenin III veya IV ışınım sınıfında bulunanlar
 - Benzer tayf türüne sahip olanlar
 - Farklı tayf türüne sahip olanlar
- Tip V: Bileşenlerden birinin anakolun altında olduğu sistemler

Fiziksel Sınıflandırma: Kopal'in Etkileşim Sınıflandırması

- Ayrık Çift Yıldızlar: Her iki bileşen yıldızın Roche Şişimini doldurmadığı sistemler
- Yarı-Ayrık Çift Yıldızlar: Bileşenlerden birinin Roche Şişimini doldurduğu sistemler
- Değen Çift Yıldızlar: Her iki bileşenin Roche Şişimini doldurduğu sistemler

Not. "Yakın Çift Yıldız" terimi, evrimlerinin herhangi bir aşamasında bileşen yıldızlardan birinin diğerinin evrimini etkilediği sistemleri tanımlamak için kullanılan bir terimdir.

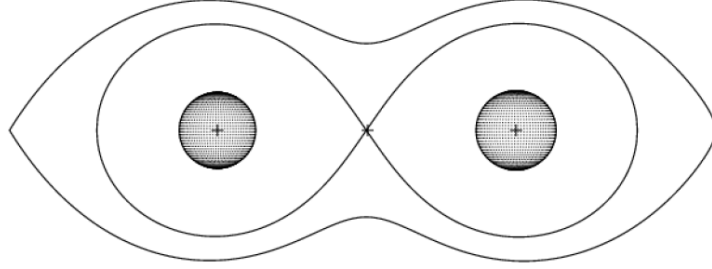
Eşpotansiyel Yüzeyle (Roche Geometrisi, 3D)



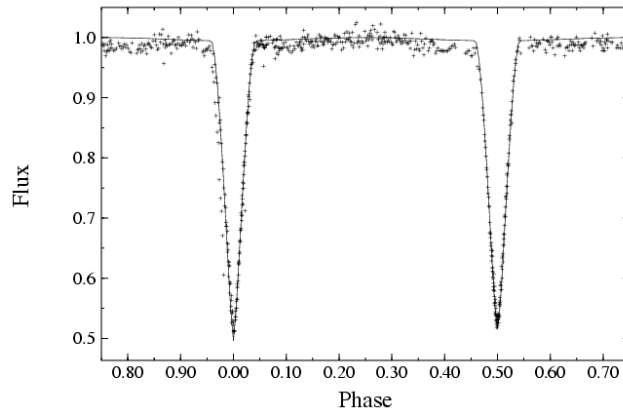
Şekil 3.5. Şekilde M_1 ve M_2 kütleli bir sisteminin oluşturduğu eşpotansiyel yüzeyle ve Lagrange noktaları gösterilmiştir. L_1 , L_2 , L_3 , L_4 ve L_5 noktaları her iki cismin uyguladığı çekim kuvvetinin dengede olduğu noktalardır. Bu noktalarda bulunan herhangi bir kütle, her iki cisim üzerine de düşmez. Bu noktalar sistem ile birlikte hareket eder ve dolanma hareketinde bulunur. 8 biçimli şekle Roche geometrisi adı verilir.

Ayrık Çift Yıldız Örneği

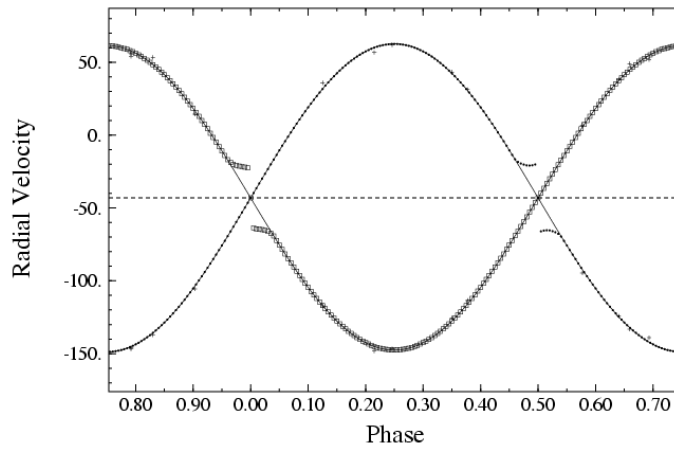
Not. Bkz. http://caleb.eastern.edu/binary_type_definitions.php



Şekil 3.6. KP Aql için oluşturulmuş Roche Geometrisi. Her iki bileşeni Roche Şişimi içerisinde kalmış sistemlerdir. Genel olarak bileşen yıldızların şekilleri de küresel yapıya sahiptir.

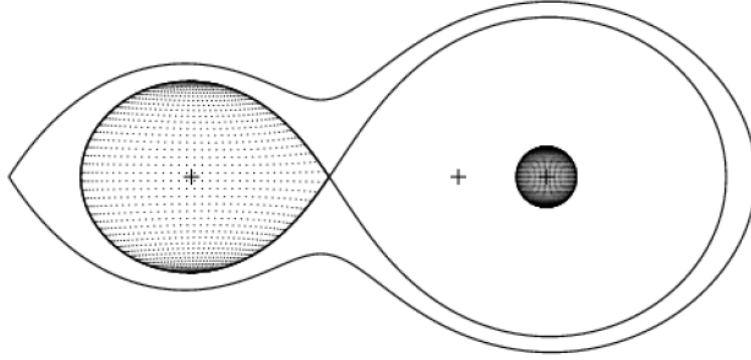


Şekil 3.7. KP Aql sisteminin ışık eğrisi (İbanoğlu, 1974)

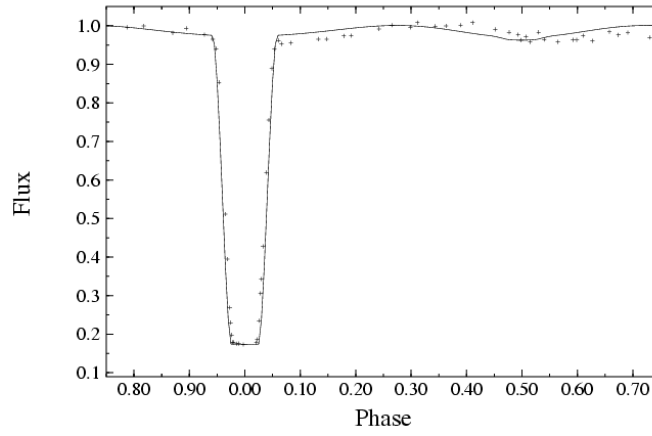


Şekil 3.8. KP Aql sisteminin dikine hız eğrisi (İbanoğlu, 1974)

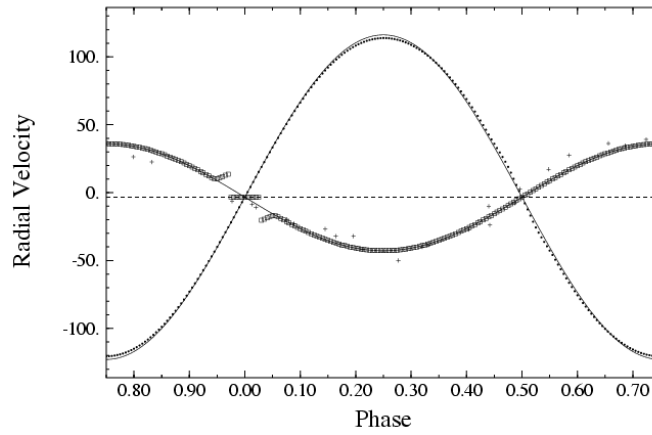
Yarı-Ayrık Çift Yıldız Örneği



Şekil 3.9. AD Her sistemi. Bileşenlerden birinin kendi iç Lagrange yüzeyini tamamen doldurmuş olduğu sistemler. Algör türü sistemler olarak da adlandırılmaktadır.

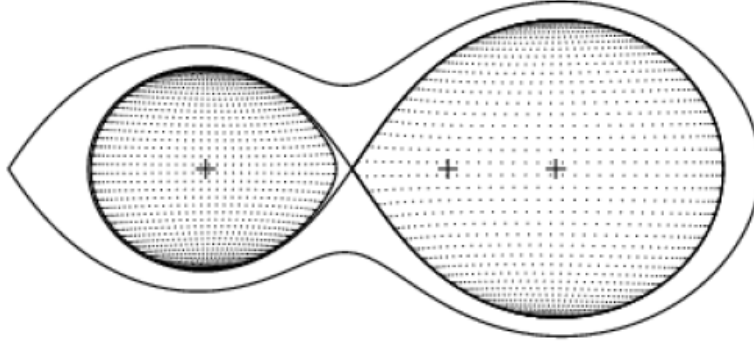


Şekil 3.10. AD Her sistemini ışık eğrisi (Mardirossian, 1980)

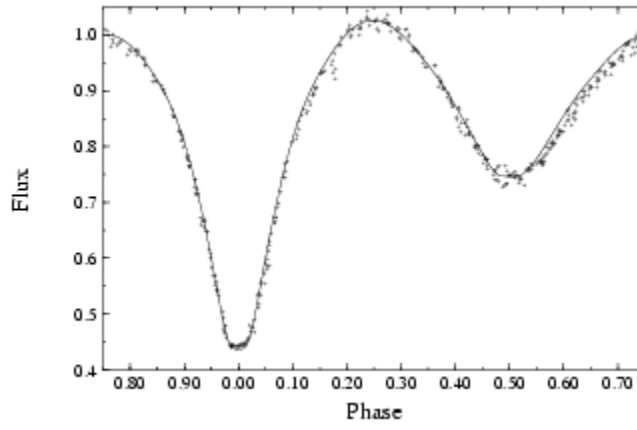


Şekil 3.11. AD Her sisteminin dikine hız eğrisi (Mardirossian, 1980)

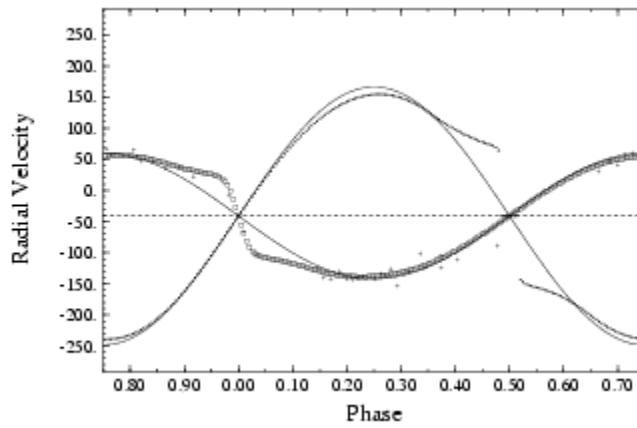
Değmeye Yakın Çift Yıldız Örneği



Şekil 3.12. V1010 Oph sistemi. Yarı-ayrık bir sistemde bileşenlerden biri tamamen diğeri ise kendi iç Lagrange yüzeyini doldurmak üzere olduğu sistemlerdir.

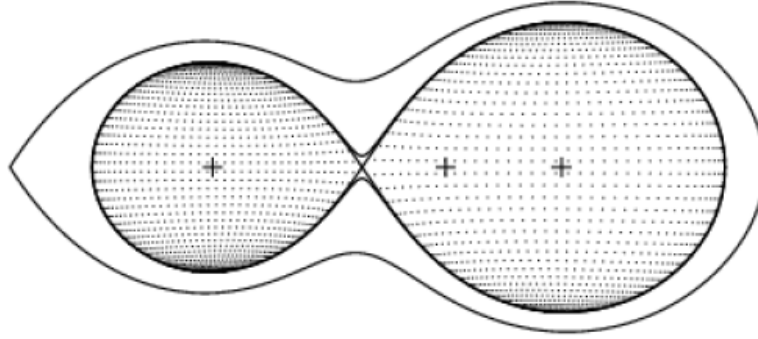


Şekil 3.13. V1010 Oph sisteminin ışık eğrisi (Leung, 1974)

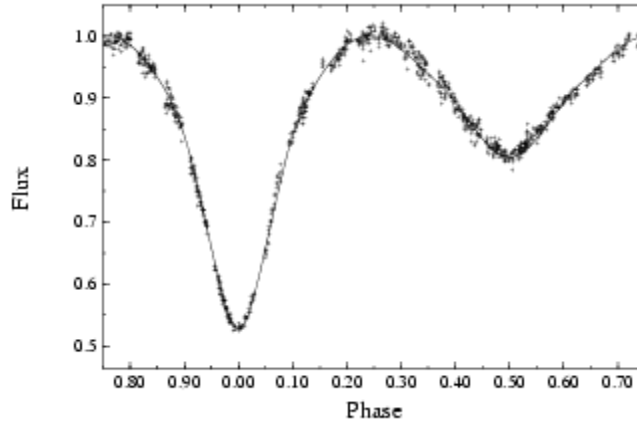


Şekil 3.14. V1010 Oph sisteminin dikine hız eğrisi (Leung, 1974)

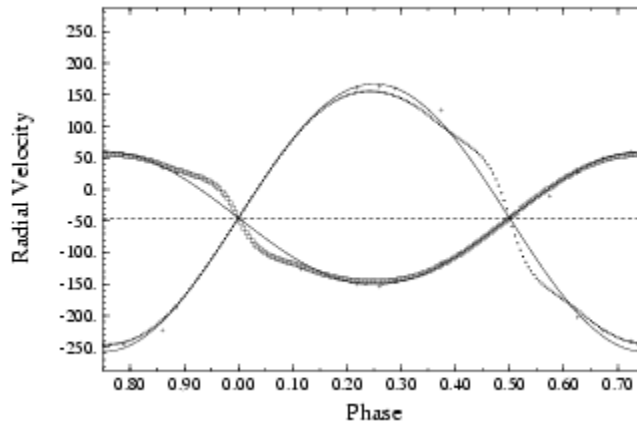
Değen Sistem Örneği



Şekil 3.15. BX And sistemi. Her iki bileşenin de kendi iç Lagrange yüzeyini doldurmuş olduğu sistem.

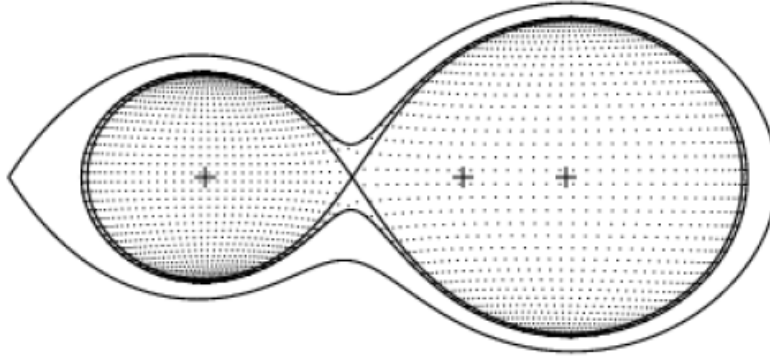


Şekil 3.16. BX And sisteminin ışık eğrisi (Samec, 1989)

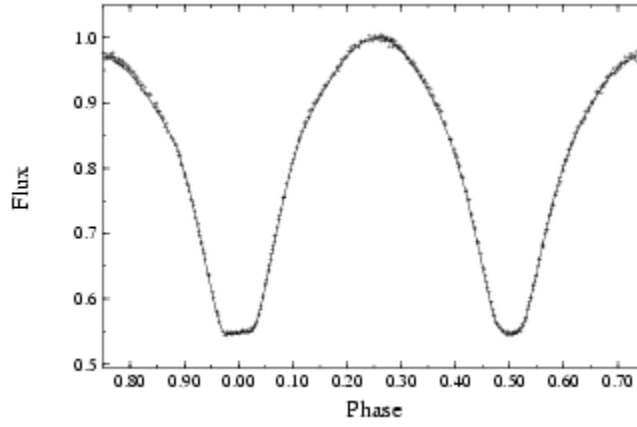


Şekil 3.17. BX And sisteminin dikine hız eğrisi (Samec, 1989)

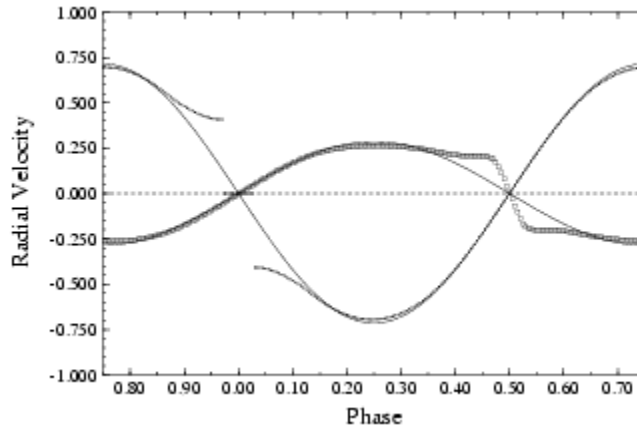
Aşırı Değer Sistem Örneği



Şekil 3.18. AE Phe sistemi. Her iki bileşenin kendi iç Lagrange yüzeyini doldurmuş olduğu ve taşma gösteren sistem.

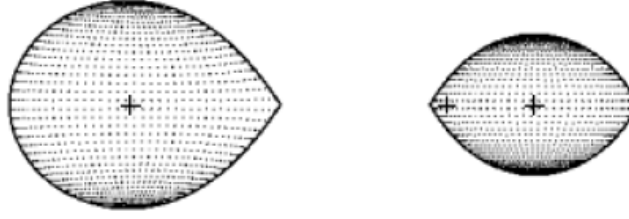


Şekil 3.19. AE Phe sisteminin ışık eğrisi (Maceroni, 1994)

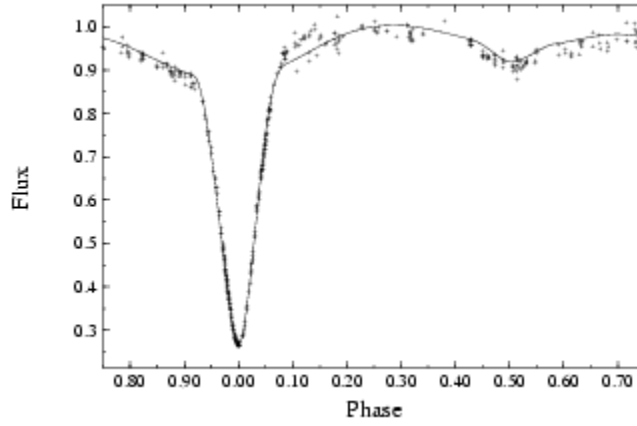


Şekil 3.20. AE Phe sisteminin dikine hız eğrisi (Maceroni, 1994)

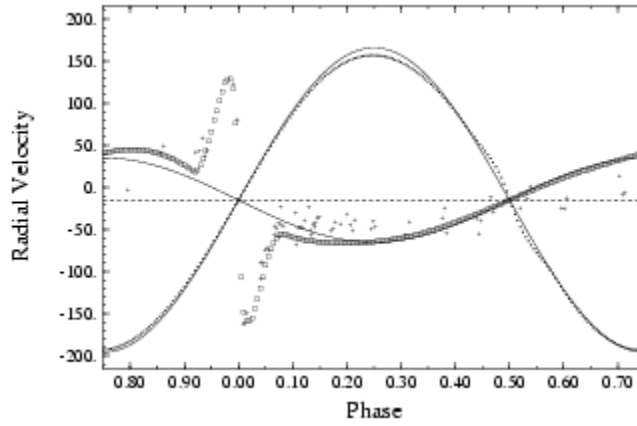
Double Contact System



Şekil 3.21. RZ Sct sistemi. Her iki bileşeni kendi iç Lagrange yüzeyine değen ve bileşenlerden biri veya her ikisinin senkronize dönmediği sistemler.



Şekil 3.22. RZ Sct sisteminin ışık eğrisi (Wilson, 1985)



Şekil 3.23. RZ Sct sisteminin dikine hız eğrisi (Wilson, 1985)

Çift Yıldız İstatistiği

- Görsel Çift Yıldızlar: ~80000 tanesi bilinmektedir. Bunlardan bazıları optik çiftlerdir. ~1000 tanesinin yörüngesi bilinmektedir ve ~300 tanesinin yörüngesi iyi bir duyarlılıkta bilinmektedir.
- Tayfsal Çift Yıldızlar: ~1500 tanesinin yörüngesi ve ~1000 tanesinin ise dikine hız değişimi gösterdiği bilinmektedir.
- Fotometrik Çift Yıldızlar: ~4000 tane sistem kataloglarda bulunmaktadır fakat ~500 tanesinin ayrıntılı ışık eğrisi çözümü yapılmış durumdadır.

Seçim Etkisi ve Çift Yıldızların Keşfedilme Olasılığı

Görsel çift yıldızlarda (Yakın ve uzun dönemli olanlar)

- $P=f(m_v, \Delta m, \rho)=f'(\pi)$

Tayfsal çift yıldızlarda (Bileşenlerin parlaklık farkları küçük ve büyük genliğe sahip olanlar)

- $P=f(m_v, \Delta m, i, K)$

Örten değişen çift yıldızlarda (Yörünge eğim açısı 90 dereceye yakın olanlar)

- $P=f(m_v, i, P)$

İstatistiksel olarak 100 tane yıldızdan;

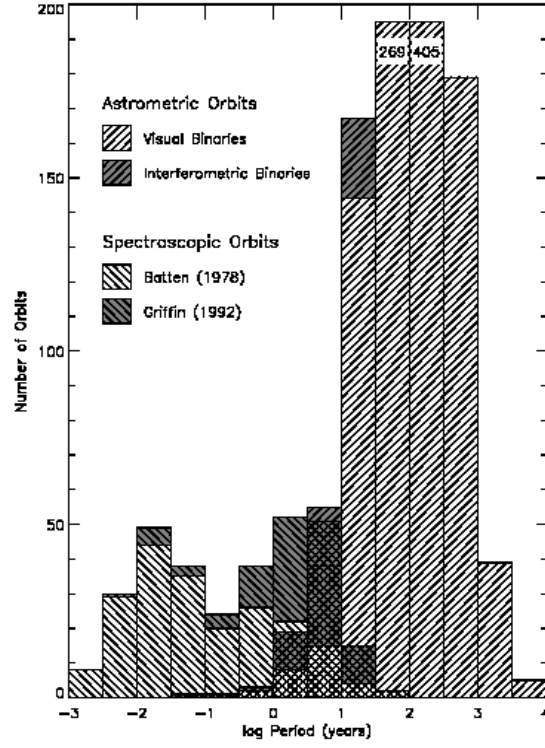
- 30 tanesi tek yıldız (30 yıldız)
- 47 tanesi çift sistem (94 adet yıldız)
- 23 tanesi çoklu sistem (81 adet yıldız)

Buradan 100 tane yıldızın gerçekte 205 adet bileşene sahip olduğu söylenebilir. Bir başka ifade ile bütün yıldızların %85'inin çift veya çoklu sistem üyesi olduğunu söyleyebiliriz. (Çift+Çoklu Sistemlerin sayısı=175, 175/205=0.85) (Kaynak, W.D. Heintz, 1978)

100 adet çift yıldızla ilişkin a yarı-büyük eksen uzunluklarının dağılımı:

- 8 adet çift yıldız $0.01 < a < 0.1$ AB
 - 12 adet çift yıldız $0.1 < a < 1$ AB
 - 31 adet çift yıldız $1 < a < 10$ AB
 - 30 adet çift yıldız $10 < a < 100$ AB
 - 24 adet çift yıldız $100 < a < 1000$ AB
 - 6 adet çift yıldız $a > 1000$ AB
- (Kaynak: W.D. Heintz, 1978)

Çift Yıldızlarda Dönem Dağılımı



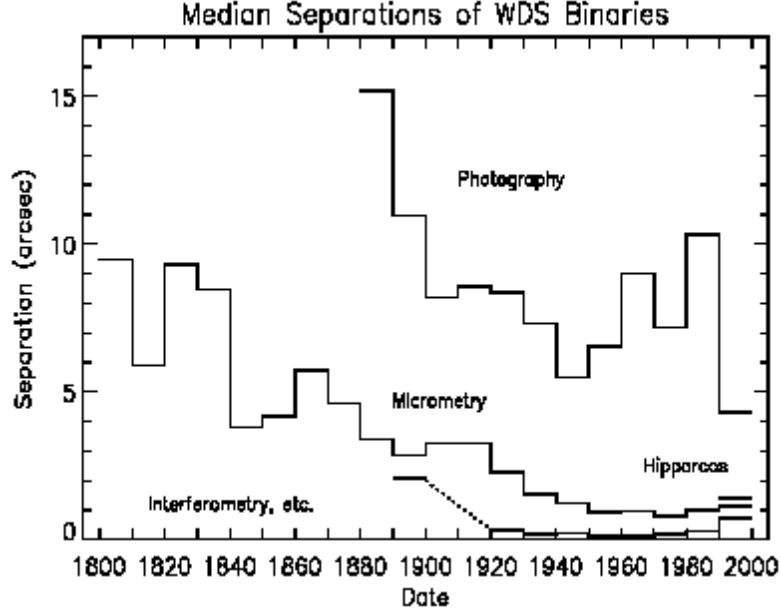
Şekil 3.24. Yörünge dönemine göre çift yıldızların sayısı.

İnterferometrik Gözlemlerde Bileşen Yıldızları Ayırabilme Sınırı

Lower limit to period for a 350 meter baseline

Distance (pc)	$P_{\text{shortest}}(M_t=2M_{\text{sun}})$	$P_{\text{shortest}}(M_t=5M_{\text{sun}})$	$P_{\text{shortest}}(M_t=10M_{\text{sun}})$	$P_{\text{shortest}}(M_t=20M_{\text{sun}})$
25.0	0.2	0.3	0.4	0.6
50.0	0.5	0.8	1.2	1.6
75.0	0.9	1.5	2.1	3.0
100.0	1.5	2.3	3.3	4.6
125.0	2.0	3.2	4.6	6.5
150.0	2.7	4.2	6.0	8.5
175.0	3.4	5.4	7.6	10.7
200.0	4.1	6.5	9.2	13.1
225.0	4.9	7.8	11.0	15.6
250.0	5.8	9.1	12.9	18.3
275.0	6.7	10.5	14.9	21.1
300.0	7.6	12.0	17.0	24.0
325.0	8.6	13.5	19.2	27.1
350.0	9.6	15.1	21.4	30.3
375.0	10.6	16.8	23.7	33.6
400.0	11.7	18.5	26.2	37.0
425.0	12.8	20.3	28.6	40.5
450.0	14.0	22.1	31.2	44.1
475.0	15.1	23.9	33.9	47.9
500.0	16.3	25.9	36.6	51.7
750.0	30.0	47.5	67.2	95.0
1000.0	46.2	73.1	103.4	146.2
10000.0	1462.3	2312.1	3269.8	4624.2

Bileşenler Arası Ayrıklık Ölçümlerinin Zamana Göre Değişimi



Şekil 3.25. 1800 ile 2000 yılları arasında Washington Double Star kataloğunda bulunan çift yıldızların bileşenleri arasındaki ayrıklık dağılımının medyan dağılımı. İlk interferometrik ölçüm Schwarzschild tarafından 1890'lı yılların ortalarında yapılmıştır ve 1920'li yıllara kadar başka bir interferometrik gözlem yapılmamıştır. Bu nedenle grafikte bir boşluk bulunmaktadır.

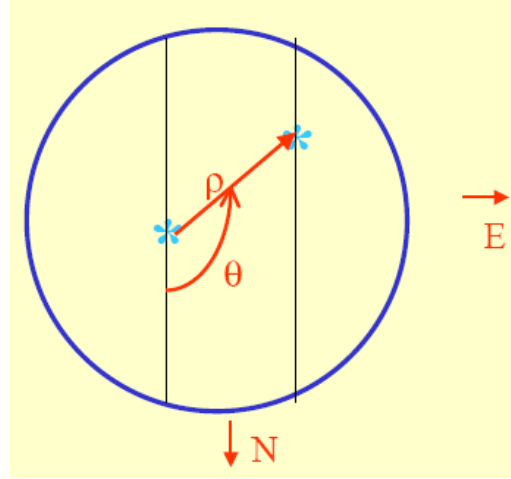
Görsel Çift Yıldızlar

Çıplak gözle bileşen yıldızları ayrı ayrı görülebildiği sistemler olduklarından, bileşen yıldızların yörüngesine ilişkin konumlarını gözlemek mümkündür. Yakın zamana kadar ölçüm aracı mikrometre olmuştur.

Gözlemsel olarak;

- Durum açısı, θ
- Açısal ayrıklık: ρ
- Gözlem zamanı: t

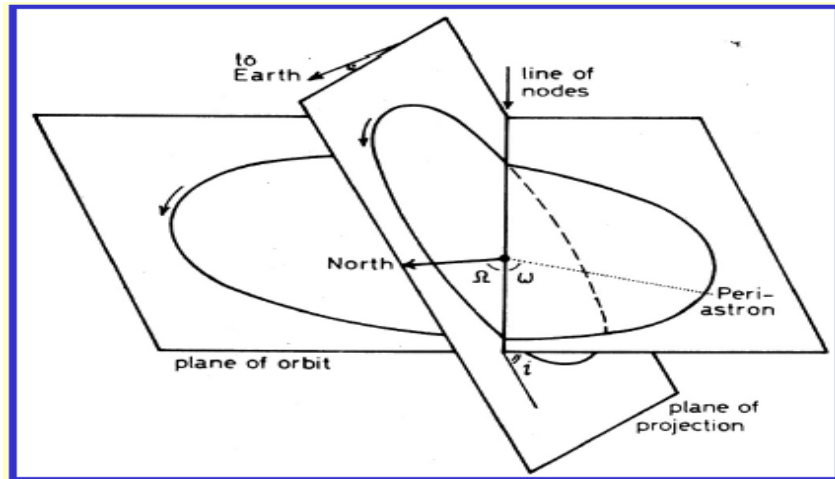
parametreleri elde edilir.



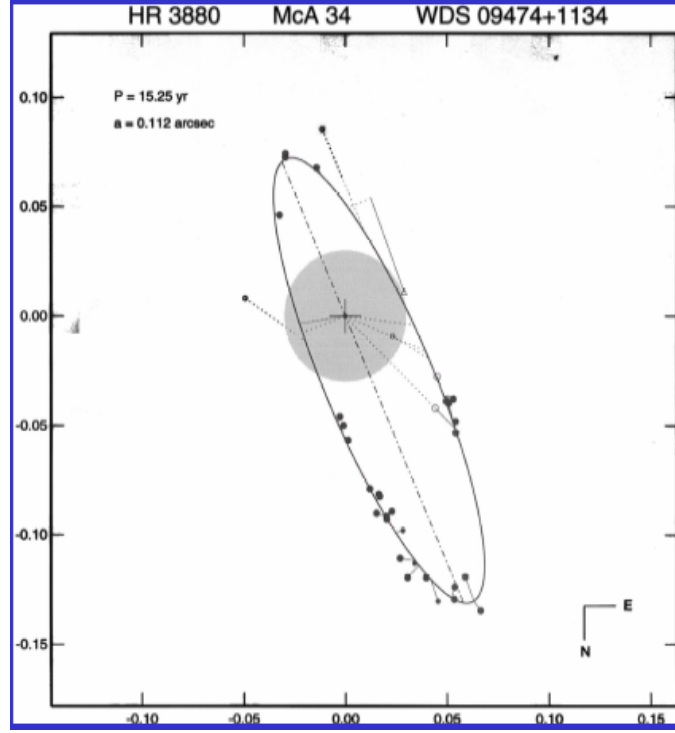
Şekil 3.26. Mikrometre kullanılarak elde edilen gözlemsel veriler. Kuzey yönü aşağı, doğu yönü ise sağ tarafa doğrudur. θ açısı kuzeyden doğuya doğru ölçülür.

Görsel Çift Yıldızların Yörünge Analizlerinden Ulaşılabilen Parametreler:

- P (yıl): Yörünge dönemi
- T_0 (JD): Enberi noktasından geçiş zamanı
- a (yay-saniyesi): Yarı-büyük eksen uzunluğu
- i ($^\circ$): Yörünge'nin bakış doğrultumuza dik doğrultuda yaptığı açı
- e : Dışmerkezlik
- ω ($^\circ$): Enberi noktasının düğümler doğrultusuyla yaptığı açı
- Ω ($^\circ$): Düğümler doğrultusunun kuzeyle yaptığı açı



Şekil 3.27. Gökyüzü ve görünür yörünge doğrultuları ve ilgili açılar.



Şekil 3.28. HR3880 (McA 34, WDS09474+1134) sisteminin görünür yörünge çizimi. Siyah noktalar gözlemleri göstermektedir. Bu sistemin yörünge dönemi $P=15.25$ yıl ve yarı-büyük eksen uzunluğu $a=0.112$ yay-saniyesi olarak ölçülmüştür.

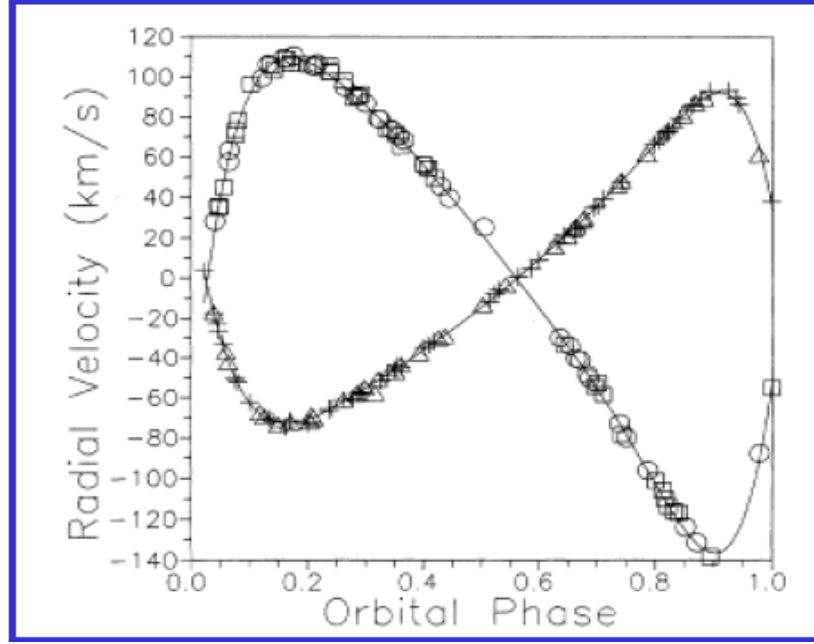
Tayfsal Çift Yıldızlar

Gözlemsel verileri:

- Tek Çizgili Tayfsal Çift Yıldızlar (SB1)
 - Baş yıldızın dikine hız değişimi v , ve gözlem zamanı t
- Çift Çizgili Tayfsal Çift Yıldızlar (SB2)
 - Baş ve yoldaş yıldızın dikine hız değişimi, v_1 ve v_2 ve gözlem zamanı t

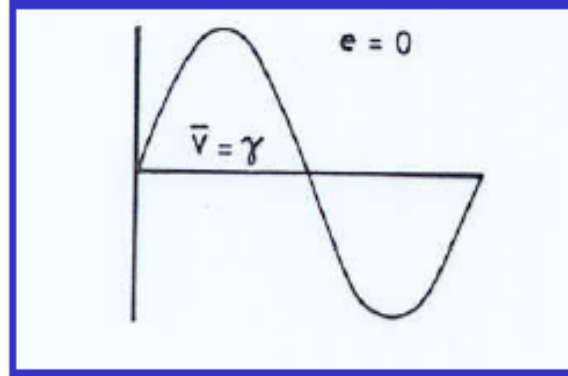
Tayfsal çift yıldızların yörünge parametreleri:

- P (yıl): Yörünge dönemi
- T_0 (JD): Enberi noktasından geçiş zamanı
- a (km): Yarı-büyük eksen uzunluğu
- V_0 (km/sn): Kütle merkezinin hızı (γ_0 sembolü de kullanılmaktadır)
- e : Dışmerkezlik
- ω ($^\circ$): Enberi noktasının boylamı
- K_1 ve K_2 (km/sn): Baş ve yoldaş bileşenin dikine hız genlikleri

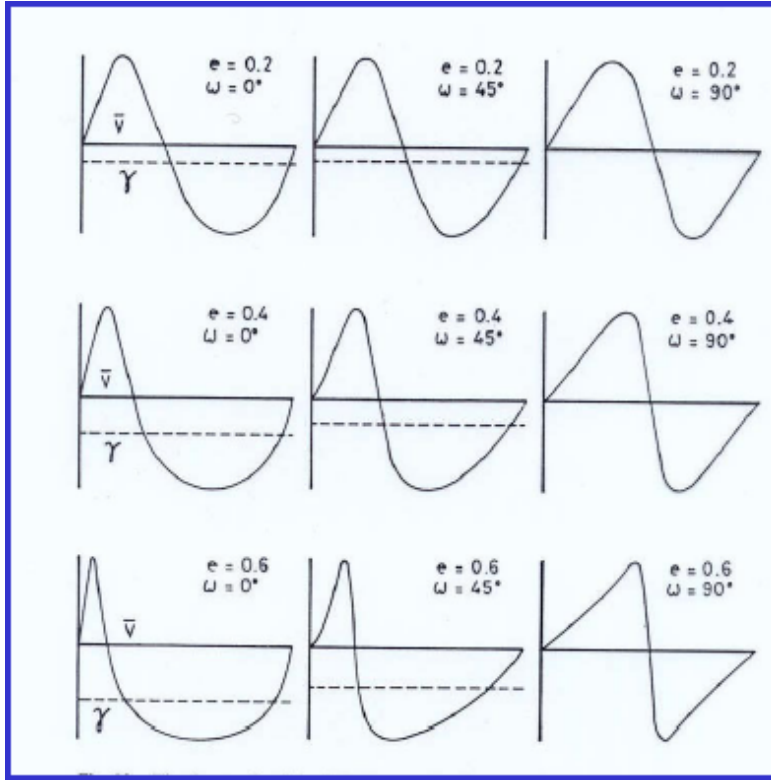


Şekil 3.29. HR266 sisteminin dikine hız değişimi.

Dikine hız eğrilerinin değişimi e dışmerkezlik değeri ile ω açlarına çok bağlıdır.



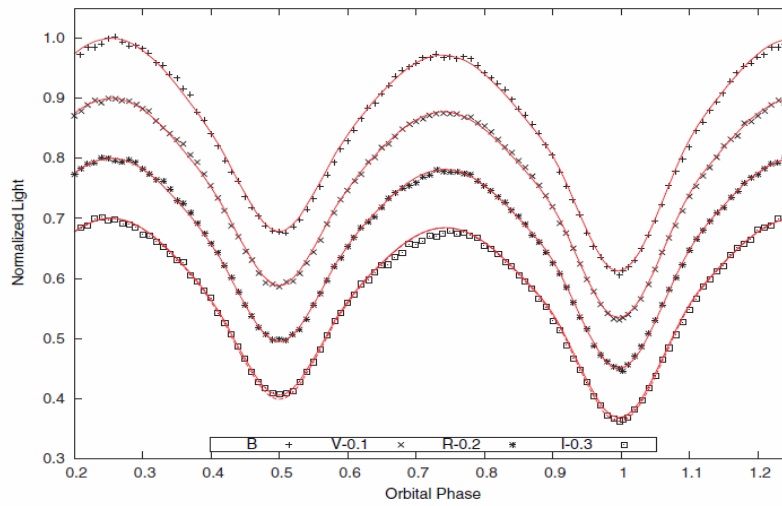
Şekil 3.30. Dışmerkezlik değeri sıfır olan (dairesel) bir sistemin dikine hız değişimi.



Şekil 3.31. Farklı dışmerkezlilik ve ω açlarına bağlı olarak dikine hız eğrisindeki değişim.

Fotometrik Çift Yıldızlar

Gözlemsel verileri sistemin toplam parlaklığı ve t zamandır.



Şekil 3.32. HH Boo sistemine ilişkin örnek gözlemsel veri.

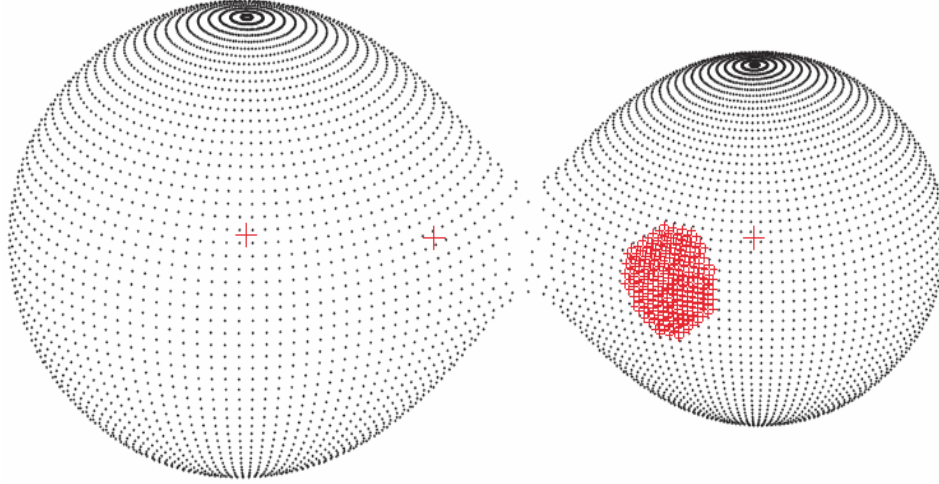


Fig. 8. Roche geometry of the components of HH Boo for the orbital phase 0.75 showing the modeled cool starspot region.

Şekil 3.33. HH Boo sisteminin Roche geometrisi ve yıldız yüzeylerinden birinde bulunan leke.

Örten Çift Yıldızlara ilişkin hesaplanabilir parametreler

- P (gün): Yörünge dönemi
- e : Yörünge dışmerkezliği
- i ($^\circ$): Yörünge düzleminin bakış doğrultumuza dik düzlemle yaptığı açı
- $q(=m_2/m_1)$: Fotometrik kütle oranı
- A_1, A_2 : Baş ve yoldaş bileşene ilişkin bolometrik albedo değerleri
- g_1, g_2 : Baş ve yoldaş bileşene ilişkin çekim kararma sabitleri
- x_1, x_2 : Baş ve yoldaş bileşene ilişkin kenar kararma sabitleri
- Ω_1, Ω_2 : Baş ve yoldaş bileşene ilişkin yüzey potansiyeli değerleri
- L_1, L_2 : Baş ve yoldaş bileşene ilişkin kesirsel ışınm güçleri
- r_1, r_2 : Baş ve yoldaş bileşene ilişkin kesirsel yarıçapları
- (B-V): Renk ölçükleri

Farklı Gözlem Yöntemlerine Göre Hesaplanabilen Parametreler

	P	T	a	e	i	ω	Ω	M_1	M_2	R_1	R_2	L_1	L_2
Görsel Ç.Y. (VB)	E	E	a''	E	E	E	E	Uzaklık ve kütle oranı bilinirse		H	H	E	E
Tek Çizgili SB1	E	E	$a_1 \text{Sini}$	E	H	E	H	Kütle fonksiyonu		H	H	H	H
Çift Çizgili SB2	E	E	$a \text{Sini}$	E	E	E	H	$x \text{Sin}^3 i$	$x \text{Sin}^3 i$	H	H	E?	E?
Örten Değişenler (PB)	E	E	H	E	E	$\sim E$	H	H	H	$r_1=R_1/a$	$R_2=R_2/a$	E	E

Kütle-Işınım Gücü Bağıntısı

Deneyel olarak 1923 yılında Hertzsprung ve Russel tarafından, teorik olarak Eddington'un yapmış olduğu çalışmadan sonra bulunmuştur:

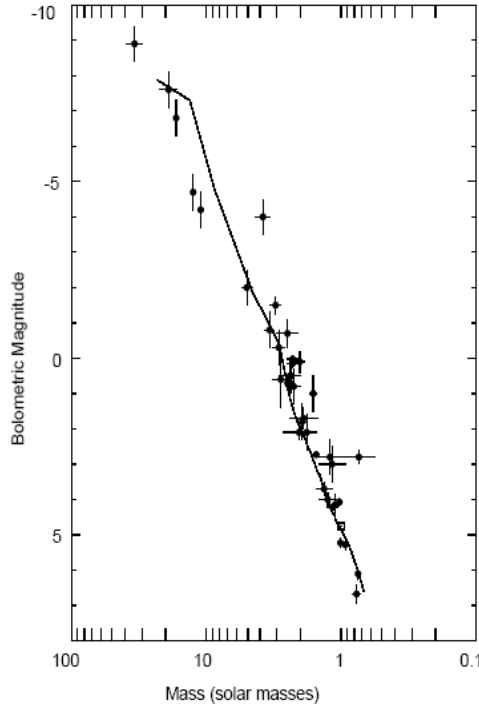
$$L = M^k R^x \mu^y \approx M^4 R^{-1/2} \mu^{15/2} \sim M^k$$

veya,

$$M_{\text{bol}} = M_{\odot} - 2.5 \kappa \log M$$

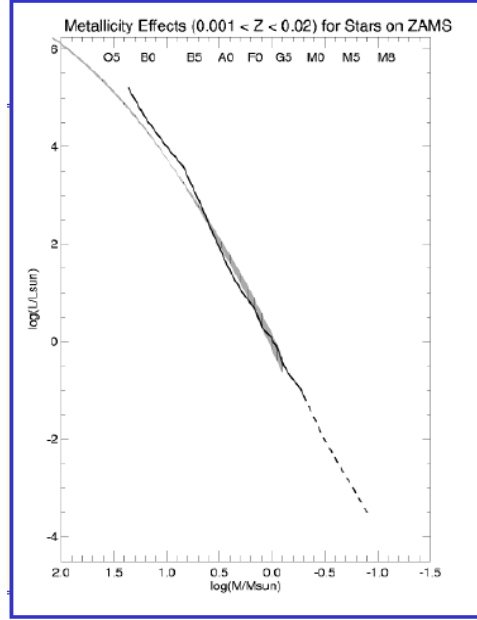
Deneyel bağıntı iki farklı doğrudan oluşmaktadır ve $M = 0.5 M_{\odot}$ civarında birbirleri ile kesişmektedir.

- $M < 0.5 M_{\odot}$ için: $\log L/L_{\odot} = 2.4 \log M - 0.4$
- $M > 0.5 M_{\odot}$ için: $\log L/L_{\odot} = 3.8 \log M$

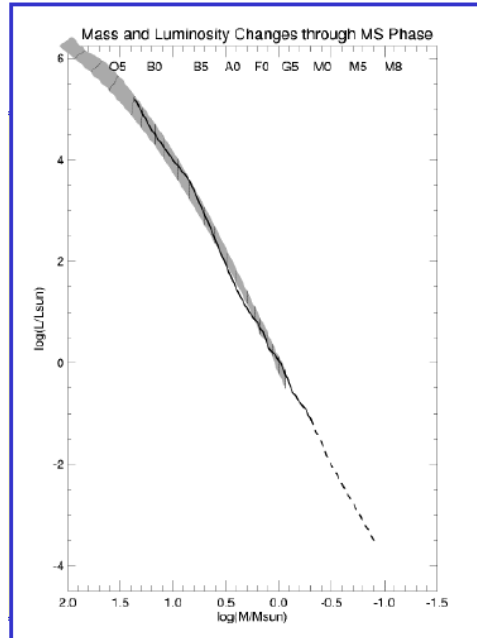


Şekil 3.34. İnterferometrik gözlemlerden bulunan astrometrik yörüngelerin çözümünden elde edilen Kütle-Işınım Gücü diyagramı.

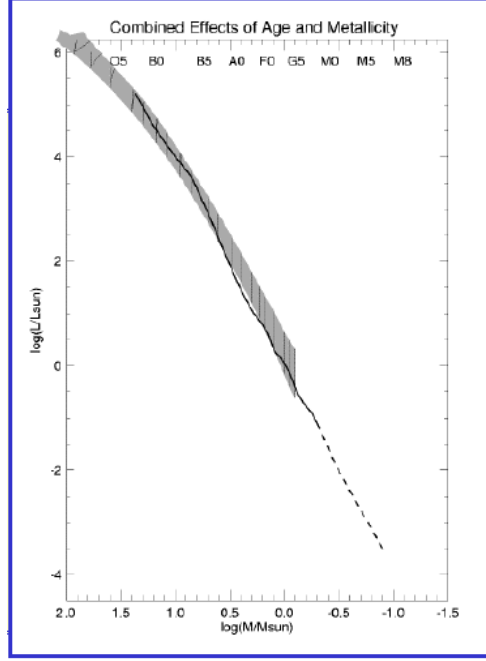
Teorik Kütle-Işınım Gücü Bağantısı



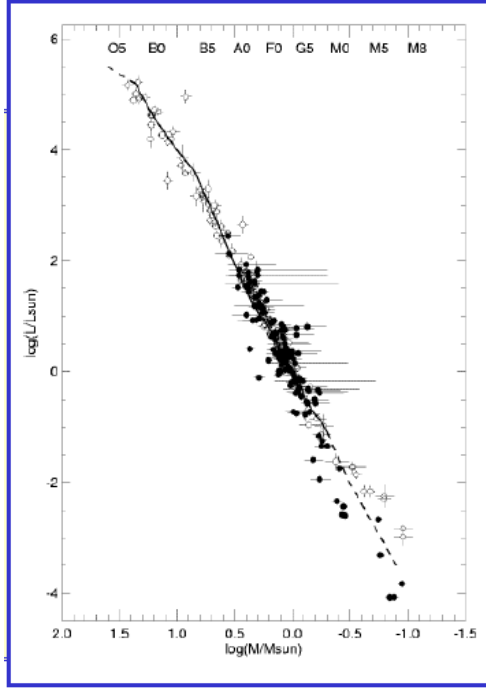
Şekil 3.35. ZAMS: Zero-Age Main Sequence (Sıfır Yaş Anakol Yıldızları). 1999 yılında W.I. Hartkopf tarafından hesaplanan değerlerdir. Eğrinin değişimi yıldızlara ilişkin metal bolluğu nedeniyle ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.36. 1999 yılında W.I. Hartkopf tarafından hesaplanan değerlerdir. Eğrinin değişimi yıldızların yaşlarına bağlıdır. MS (Main Sequence: Anakol).



Şekil 3.37. 1999 yılında W.I. Hartkopf tarafından hesaplanan değerlerdir. Eğrinin değişimi yıldızların metal bollukları ve yaşlarına bağlıdır.



Şekil 3.38. D.M. Popper, Ann.Rev.Astron&Astroph., 18, 115, 1980. W.I. Hartkopf tarafından 1999 yılında güncellenmiş Kütle-İşinimgücü bağıntısı.

Kütle-İşinimgücü bağıntısı ilk defa A.S. Eddington tarafından yıldızların içyapıları üzerine yaptığı çalışmalar sonucunda teorik olarak ortaya konmuştur. Yıldızların bolometrik işinimgüçleri ile kütleleri arasında,

$$L=a M^b \quad (106)$$

şeklinde bir ilişkinin bulunduğu gösterilmiştir. Eddington kendi modeli için $b=3$ değerini ve daha sonra güncelleştirilmiş yıldız iç yapı modelleri ile de $b=5.5$ değerini elde etmiştir.

M mutlak parlaklık ve M kütle olmak üzere (Şekil 40),

$$M_{bol}=M_c - 2.5 \text{ Log } M \quad (107)$$

Bir çift yıldız sistemi için bu ifadenin ayrı ayrı yazılması durumunda,

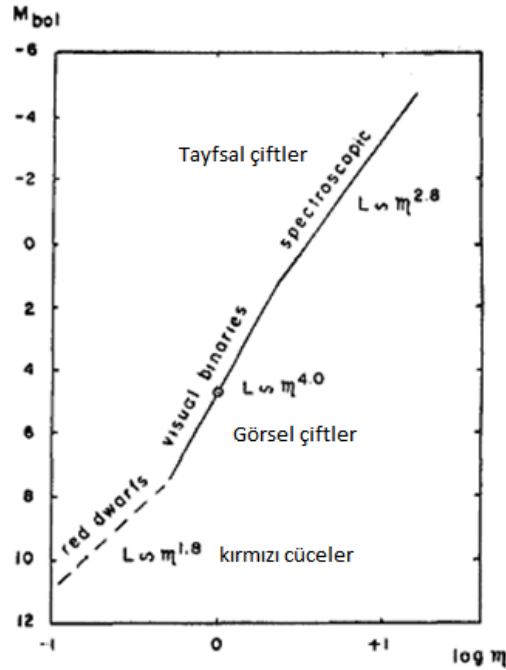
$$\Delta m_{bol}=\Delta M_{bol}=2.5 b \text{ Log}(M_1/M_2) \quad (106)$$

elde edilir. Yürütülen araştırmalar neticesinde Güneş benzeri bileşenlere sahip görsel çift yıldızlar için $b=4.0$ değeri bulunmuştur. Tayfsal çift yıldızların verilerinden ise daha parlak yıldızlar için b değeri daha küçük çıkmaktadır.

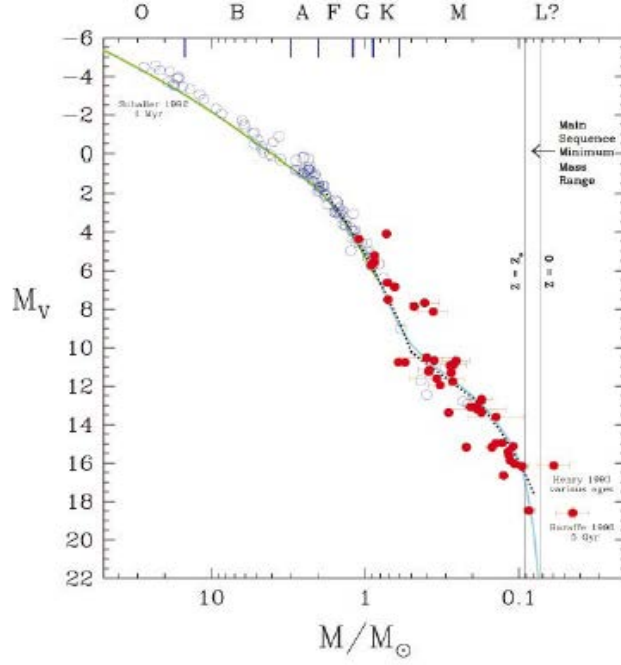
Güneş benzeri yıldızlar için M_{bol} değeri $+7.5$ ile 0.0 kadir arasında değişmektedir. Buradan,

$$M_{bol}=4.6-10.0 \text{ Log } M \quad (109)$$

ifadesi elde edilir. Kırmızı cüceler için iyi bir bağıntı elde edilebilmiştir fakat bu bağıntının eğimi daha küçüktür, $b=1.8$. Beyaz cüceler için kütle ve ışınım gücü bağıntısı düzenli bir değişim göstermemektedir. W UMa türü değişen yıldızlar için de bileşen yıldızların kütlelerinin doğrusal bir değişimden sapmalar gösterdiği bilinmektedir.



Şekil 3.39. Farklı türden çift yıldızlar için Kütle-İşınım gücü bağıntısı



Şekil 3.40. Alan yıldızları için elde edilmiş Kütle-Işınımgücü bağıntısı. $30 M_{\odot}$ ile $0.08 M_{\odot}$ arasındaki kütleyle sahip yıldızlar. Açık daireler örten değişen yıldızları, içi dolu noktalar astronomik çift yıldızlara ait gözlemlerden elde edilmiştir. 0.092 ile $0.072 M_{\odot}$ arasındaki bölge en küçük kütleyle sahip anakol yıldızlarının bulunduğu bölgeyi göstermektedir. Büyük kütleli yıldızlar için Schaller ve ark. (1992)'nin uyguladığı fit, Henry & McCarty (1993) ile Henry ve ark. (1999) tarafından üretilen deneysel fit (kesikli çizgi) gösterilmiştir. Her iki fit'de $1 M_{\odot}$ civarında sonlanmaktadır.

Güncel Kütle-Işınımgücü Bağıntısı:

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx .23 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.3} \quad (M < .43M_{\odot})$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4 \quad (.43M_{\odot} < M < 2M_{\odot})$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 1.5 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} \quad (2M_{\odot} < M < 20M_{\odot})$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 3200 \frac{M}{M_{\odot}} \quad (M > 20M_{\odot})$$