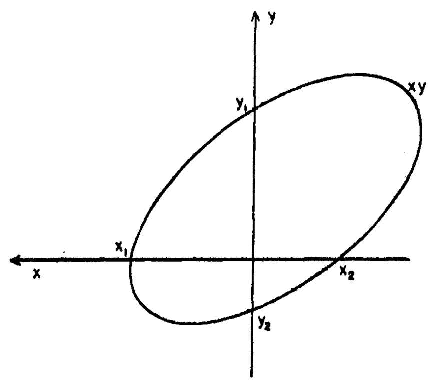
Kowalsky – Glassenapp Yöntemi

Bu yöntem genel olarak P yörünge dönemi ve T enberi noktasından geçiş zamanı parametrelerinin bulunması amacıyla kullanılır. Kullanılacak formüller Aitken'in "The Binary Stars" adlı kitabında bulunmaktadır. Burada sadece yöntem ve denklemler ayrıntıya girilmeden verilecektir.

Orijinal yöntemde x-ekseni dikaçıklık yönü olarak seçilmiştir. Fakat yöntemin modernize edilmiş halinde x-ekseni sağaçıklık ve y-ekseni ise dikaçıklık ekseni olarak kullanılır. Bu yöntemde görünür yörünge elipsine ilişkin denklem,

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0$$

şeklinde kullanılır. Denklemde bulunan 5 adet katsayı, elips üzerinde bulunan beş adet özel noktaya karşılık gelir (Şekil 4.19). İlk olarak her iki eksende, eksenler ile elipsin kesiştiği noktaları ele alalım. y=0 için genel elips denkleminden, $Ax^2 + 2Gx + 1 = 0$ ifadesi elde edilir. Buradan, $x_1 + x_2 = -\frac{2G}{A}$ ve $x_1 x_2 = \frac{1}{A}$ ifadeleri bulunur. Bu denklemler sabitlerin bulunması amacıyla düzenlenirse, $A = \frac{1}{x_1 x_2}$ ve $G = -\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$ denklemleri elde edilir.

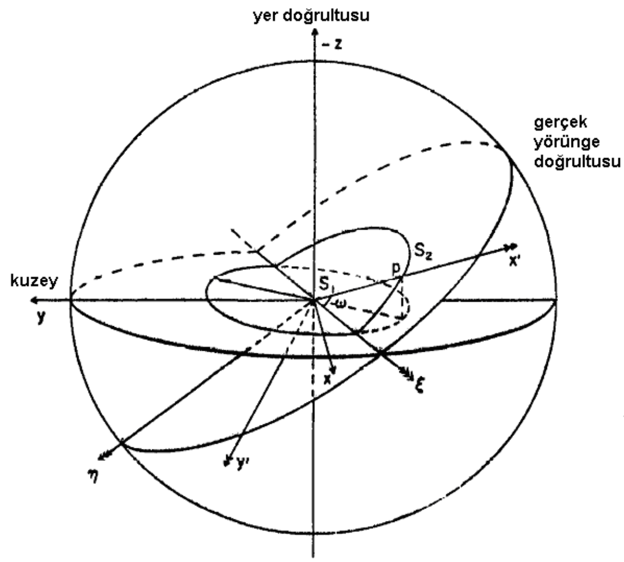


Şekil 4.19. Kowalsky – Glassenapp yönteminde görünür elips üzerinde seçilen beş özel nokta

x=0 için de B ve F katsayılarının bulunması için benzer ifadeler yazılabilir. H katsayısını bulabilmek için xy çiftinin çarpımının en büyük olduğu nokta dikkate alınır. Yukarıdaki elips ifadesi aynı zamanda ekseni bakış doğrultusu olan bir silindiri temsil eder.

Aynı noktadan çıkan bir başka koordinat sisteminde, düğümler doğrultusundaki eksen ξ (xi), gerçek yörünge düzlemi ile 90° açı yapan eksen η (eta) ve bu düzleme dik olan eksen ζ (zeta) ekseni olarak seçilir.

Dönüşüm formülleri oldukça basittir ve argümanları *i* ve Ω olan sinüslü ve kosinüslü terimler içerir. Burada ξ=0 alınarak silindirin gerçek düzlem ile çakışması sağlanır.



Şekil 4.20. Yörünge ve iki farklı koordinat sistemi

Gerçek yörünge elipsi aynı zamanda merkezi gerçek elipsin odak noktasında olan ve gerçek elipsin yarı-büyük ekseni ile odaktan geçen x'-ekseni dikkate alınarak yazılabilir. Bu durumda gerçek elipsin denklemini,

$$\frac{(x' + ae)^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

şeklinde yazabiliriz. Eksenlerin çakışması için ifade ω açısı kadar döndürülerek düğümler doğrultusu ile çakışması sağlanır. Bu işlem çok iyi bilinen dönme ifadelerinin kullanılması sayesinde gerçek elipsin aynı eksen ve aynı orijindeki ifadesi elde edilir.

Her iki elips ifadesi birbiri ile aynı olması gerektiği dikkate alındığında, katsayıları da orantılı olmalıdır. Bu şekilde toplam altı denklem bulunur ve bu denklemler yardımıyla beş adet yörünge parametresi ve orantı katsayısı, *f*, hesaplanabilir. Sonuç olarak bulunacak denklemler aşağıdaki gibidir,

$$f = \frac{1}{e^2 - 1} = -\frac{a}{p}\,, \quad p = a(1 - e^2) \qquad (54)$$

Burada p, parametre uzunluğunu, a yarı-büyük eksen uzunluğunu ve e ise dışmerkezlik değeridir.

$$\frac{\tan^2 i}{p^2} \sin 2\Omega = 2(H - FG) \qquad (55)$$

$$\frac{\tan^2 i}{p^2} \cos 2\Omega = G^2 - F^2 + B - A \qquad (56)$$

$$\frac{2}{p^2} + \frac{\tan^2 i}{p^2} = F^2 + G^2 - (A + B) \qquad (57)$$

$$\frac{e}{p} \sin \omega = +(F \sin \Omega - G \cos \Omega) \cos i \qquad (58)$$

$$\frac{e}{p} \cos \omega = -(G \sin \Omega + F \cos \Omega) \qquad (59)$$

(55) nolu denklemin (56) nolu denkleme bölünmesi durumunda,

$$\tan 2\Omega = \frac{2(H-FG)}{G^2-F^2+B-A} \tag{60}$$

ifadesi bulunur. Burada $\Omega \leq 180°$ olduğu dikkate alındığında Ω açısı bulunur. Ardından (55) veya (56) nolu denklem kullanılarak $\frac{\tan^2 i}{p^2}$ terimine ilişkin sayısal bir değer bulunur. Bu ifadenin (57) nolu denklemde yerine konulması ile $2/p^2$ ve buradan ise *p* terimi elde edilir. Bu aşamada hesaplanan p terimi kullanılarak $\tan^2 i$ ifadesinden $\pm$i değeri bulunur.

(58) nolu denklemin (59) nolu denkleme bölünmesi halinde,

$$\tan \omega = \frac{G \cos \Omega - F \sin \Omega}{G \sin \Omega + F \cos \Omega} \cos i \tag{61}$$

denklemi elde edilir ki bu denklem yardımıyla ω açısı, bilinen parametreler dikkate alınarak hesaplanabilir. Ardından (59) nolu denklemi kullanarak e dışmerkezlik değerini ve (54) nolu denklemden ise a yarı-büyük eksen uzunluğu bulunur. Bu yöntemde görünür yörünge elipsi üzerinde seçilen beş özel noktanın koordinatları okunarak sırasıyla, Ω, $\pm$i, ω, *e* ve *a* parametreleri hesaplanabilmektedir.

Grafiksel yöntem kullanılarak P dolanma dönemi ve T enberi noktasından geçiş zamanının hesaplanması için Kepler'in ikinci yasası dikkate alınarak alan hızı hesaplanır. Görünür yörünge için *2·alan=Ph'* elde edilir. Eğer alan bir planimetre yardımıyla ölçülürse buradan *P* dönemi bulunabilir. Ayrıca görünür yörüngeye ilişkin alan değerleri eksenler yardımıyla da hesaplanabilir.

Enberi noktası, görünür yörünge ile gerçek yörüngenin çakıştığı noktalardan biridir ve elipsin merkezi ile parlak yıldızı birleştiren doğrunun, yoldaş yıldıza en yakın olduğu konum olarak belirlenir. Problem, yoldaşın yörüngede bu noktadan ne zaman geçtiğinin hesaplanmasıdır. Bu amaçla enberi noktasının her iki tarafında iki adet normal nokta alınarak t_1 ve t_2 zamanları belirlenir. Enberi noktasına göre t_1 ve t_2 zamanları kadar uzaklıklar için s_1 ve s_2 alanları süpürülecektir. Kepler'in ikinci yasası (eşit zamanlarda eşit alanlar süpürür) dikkate alındığında

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{T-t_1}{t_2-T}$$

ve buradan

$$T = \frac{s_1 t_2 + s_2 t_1}{s_1 + s_2}$$

ifadesi bulunur. Bu durumda problem s_1 ve s_2 alanlarının ölçülmesi ile çözülebilir durumdadır. Bir planimetre yardımıyla veya başka bir yöntemler s_1 ve s_2 alanları ölçülebilir olduğundan enberi noktasından geçiş zamanı hesaplanabilmektedir. Daha güvenilir bir zaman bulabilmek amacıyla bu hesaplama farklı *t* zamanları dikkate alınarak tekrarlanır ve hesaplanan değerlerin ortalaması alınarak en iyi *T* değeri belirlenebilir.

Analitik olarak *P* ve *T* parametreleri iki cisim problemi dikkate alınarak çözülür. ν, gerçel anomali açısını, *E* eksantrik anomali açsını ve M_a ortalama anomali açısı olmak üzere,

$$\tan(\upsilon + \omega) = \tan(\theta - \Omega) \sec i \tag{63}$$

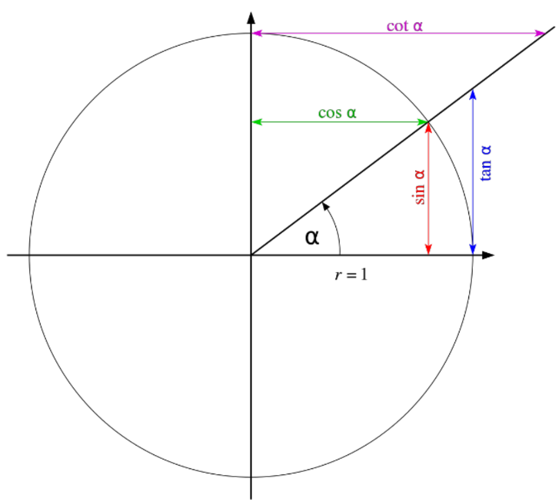
$$\tan\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \qquad (64)$$

$$M_a = E - e\sin E = \frac{2\pi}{P}(t-T) = n(t-T) \qquad (65)$$

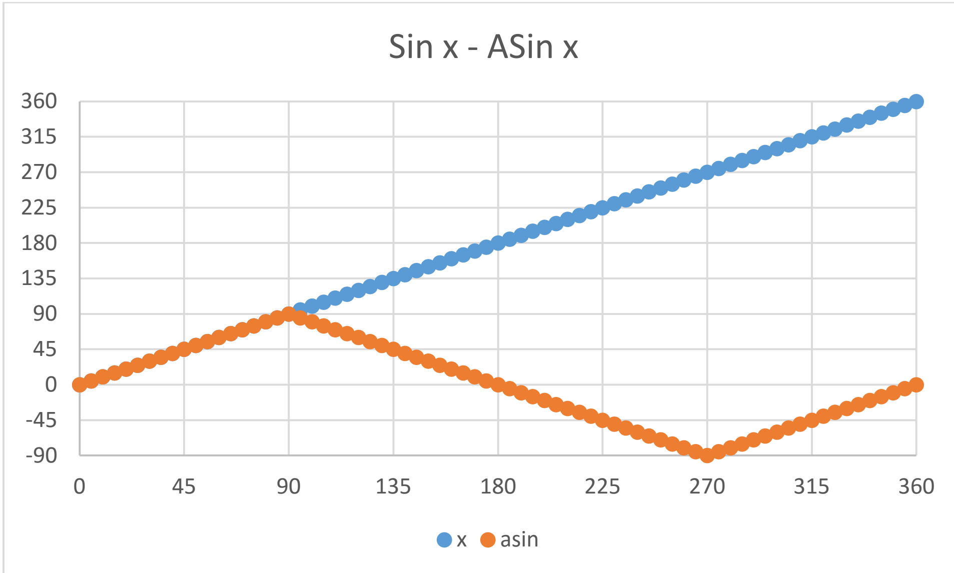
denklemleri kullanılarak hesaplanır. (65) nolu denklem Kepler denklemi olarak bilinir. (63) nolu denklemden belirli bir *t* zamanı için bilinen θ normal açısı kullanılarak ν gerçel anomali açısı bulunur. Ardından (64) nolu denklemden bu normal noktaya karşılık gelen *E* eksantrik anomali açısı hesaplanır. Bu değer (65) nolu denklemde kullanıldığında M_a ortalama anomali açısı hesaplanır. Başka bir normal nokta için de benzer bir işlem yapıldığında bu noktaya karşılık gelen başka bir M_a değeri daha bulunur. İki bilinmeyenli iki denklemin çözümü yapıldığında sisteme ilişkin *P* ve *T* değerleri hesaplanabilir. Pratikte bütün gözlem noktaları için bu hesaplama yapılır ve en küçük kareler yöntemi kullanılarak daha güvenilir *P* ve *T* değerleri bulunur.

ÖDEV 1: Görünür yörünge elipsine ilişkin katsayıları A=-2.65392, B=-2.35902, F=-0.43196, F=0.40369, H=1.82003 olarak verilmiş olan sistem için *a*, *e*, *i*, Ω ve ω yörünge parametrelerini hesaplayınız.

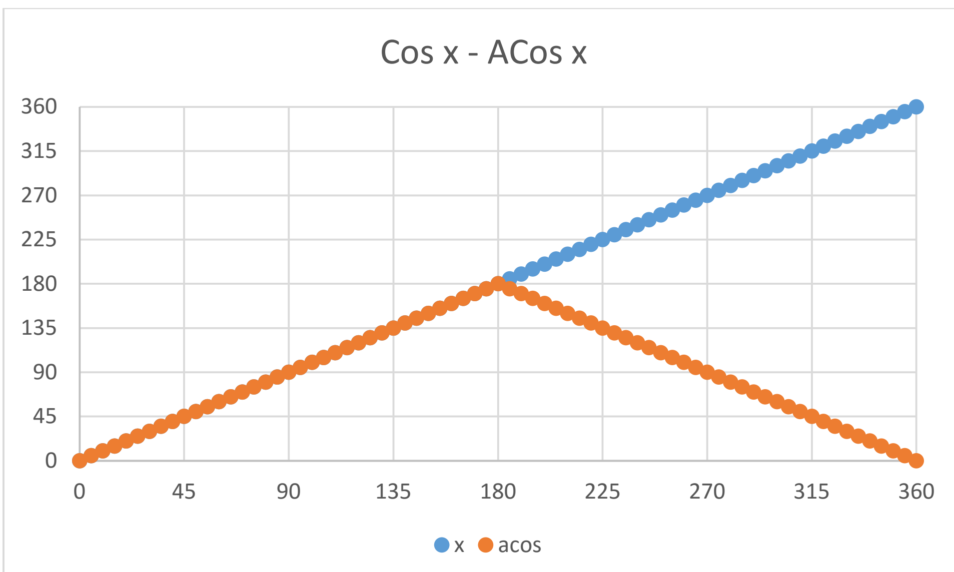
(Not. Kullanılan koordinat sistemi gereği hesaplanan *i* yörünge eğim açısına 45° ve ω açısına 180° eklenerek işlemler sürdürülmelidir.)



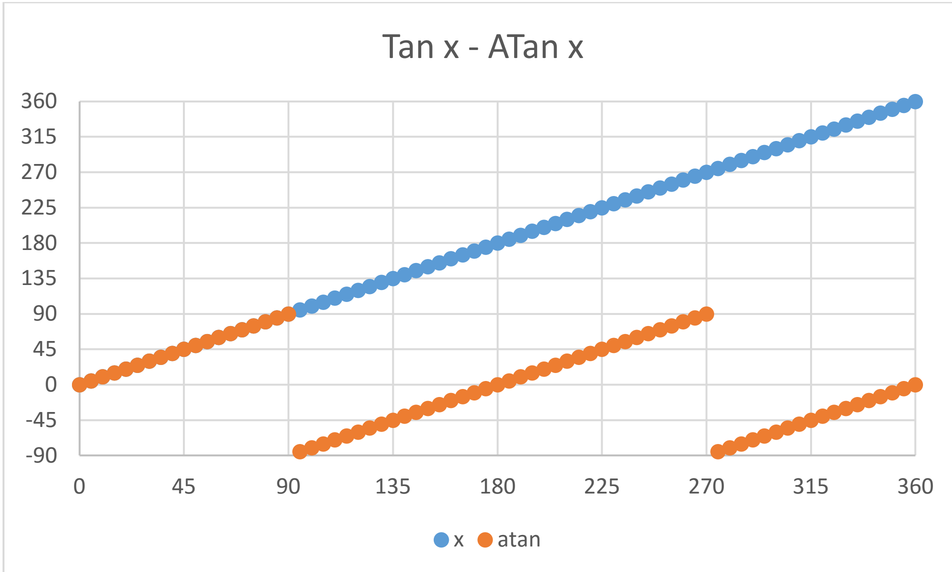
Şekil 4.21. Birim çember ve trigonometrik bağıntılar



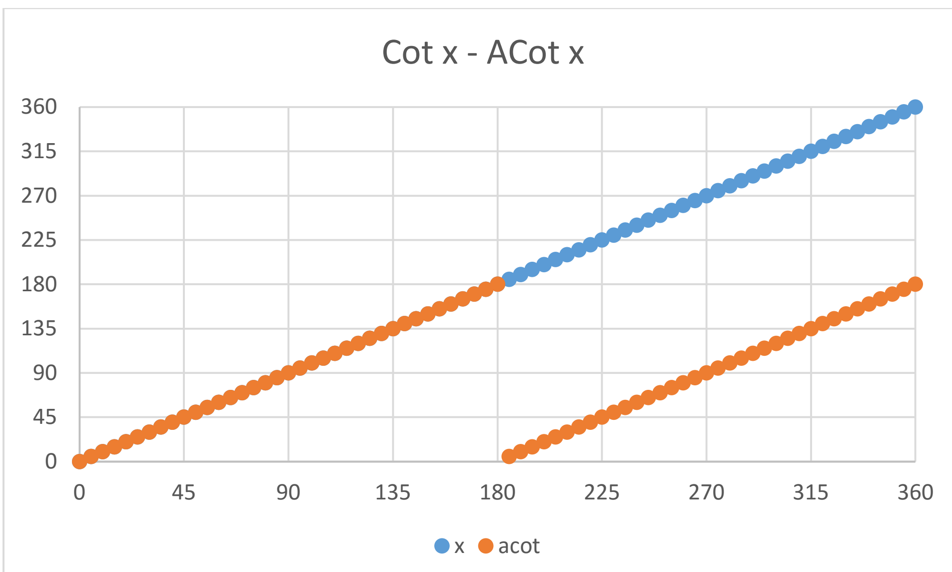
Şekil 4.22. Sin x ve ASinx dönüşümü.



Şekil 4.23. Cos x – ACos x dönüşümü



Şekil 4.24. Tan x – ATan x dönüşümü



Şekil 4.25. Cot x – ACot x dönüşümü

ÖDEV 2. Görsel çift yıldızlarda görünür yörünge elipsinin çizimi. Ödev için ihtiyaç duyulan örnek gözlemsel veri aşağıda bulunmaktadır.

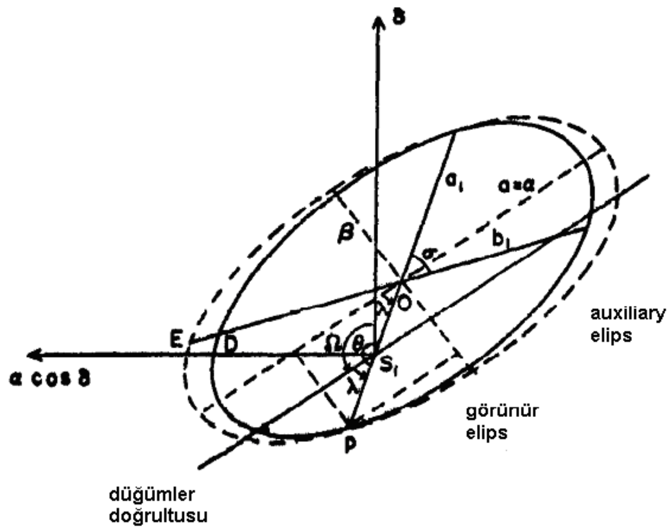
No	Tarih	θ	ρ''
1	1961.06	354.5	0.17
2	1962.16	339.1	0.16
3	1963.26	317.4	0.13
4	1964.00	293.8	0.11
5	1965.12	257.6	0.11
6	1966.13	225.0	0.14
7	1967.08	206.5	0.16
8	1967.9	194.3	0.17
9	1968.99	178.0	0.15
10	1970.27	147.1	0.09
11	1971.16	047.6	0.08
12	1972.15	011.7	0.14
13	1973.17	355.2	0.17
14	1975.15	322.0	0.14
15	1976.12	295.8	0.11
16	1976.84	287.0	0.11
17	1977.23	255.1	0.11
18	1977.36	251.1	0.11
19	1978.24	226.0	0.13
20	1979.12	207.8	0.16
21	1979.36	204.0	0.16
22	1980.22	191.5	0.17
23	1980.97	181.0	0.16
24	1981.27	175.2	0.15
25	1982.12	150.4	0.09
26	1984.17	013.8	0.14
27	1984.36	009.9	0.15
28	1985.11	357.8	0.17
29	1985.25	355.8	0.17
30	1986.21	342.1	0.16
31	1989.23	259.4	0.11
32	1992.26	194.4	0.17
33	1993.38	175.3	0.15
34	1994.20	152.7	0.1

Zwiers ve Russell Yöntemi

Yöntem grafiksel olarak uygulanan bir yöntemdir. S_1 baş bileşenin bulunduğu noktayı ve O ise görünür yörünge elipsinin merkezi olarak alınır. p sembolü Şekil 4.26'de gösterildiği gibi enberi noktası için kullanılır. İzdüşüm nedeniyle uygulanacak orantılarda bir değişim olmayacağından yörünge dışmerkezliği e yörüngedeki doğruların oranından hesaplamak mümkündür. Görünür yörüngeden,

$$e = OS_1/Op$$

doğruların büyüklüklerini oranı dışmerkezlik değeri olacaktır. a_1 doğrultusuna çizilecek bir paralel doğrultunun orta noktası yardımıyla b_1 doğrultusu çizilir.



Şekil 4.26. Zwiers ve Russell yöntemindeki görünür ve yardımcı elips.

Dışmerkezlik değeri bilindiğinden sistem için yarı-büyük eksen ile yarı-küçük eksen büyüklükleri arasındaki orantıyı bulmak mümkündür.

$$k = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \geq 1$$

Hesaplanan *k* değerine orantı katsayısı adı verilir. Ardından b_1'e paralel çizilecek ve görünür yörünge elipsinin içerisinde kalan bütün doğrultular, merkezleri aynı kalmak şartıyla *k* orantı katsayısı ile çarpılarak uzatılır. Uzatılan doğruların uç noktaları birleştirildiğinde Auxiliary elips olarak adlandırılan yardımcı elips bulunur.

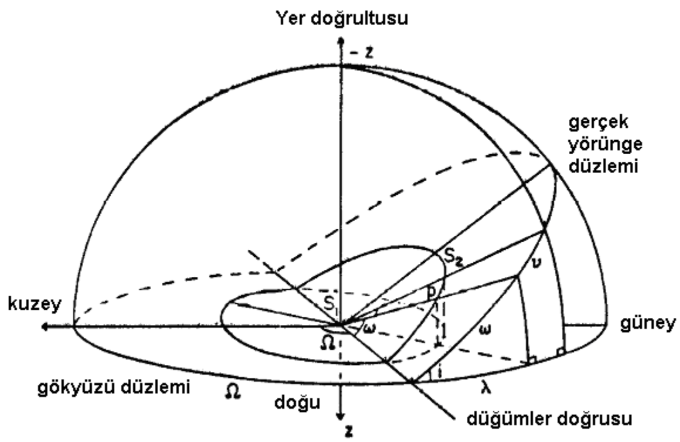
Yardımcı elips, gerçek yörüngeye ait asal çemberin izdüşümüdür. Burada α ve β terimlerinin bu yardımcı elipsin eksenlerini gösterdiğini kabul edelim. Yardımcı elipsin en büyük çapı, gerçek yörüngenin yarı-büyük eksen uzunluğunu vereceğinden $a=\alpha$ olacaktır ve grafik üzerinden yay-saniyesi birimlerinde okunur. Asal çemberin herhangi bir açı altında izdüşümü alındığında, en büyük çapı her zaman gerçek asal çemberin çapıl olacaktır. Yardımcı çemberin büyük eksenine dik doğrultudaki yarıçapı, β ekseni üzerinde $\cos i = \beta/\alpha$ oranında kısalmış olacağından bu ifade yardımıyla $\pm i$ yörüngenin bakış doğrultumuza dik düzlem ile yaptığı açı hesaplanabilecektir.

α çapı izdüşüm nedeniyle etkilenmez, bu nedenle düğümler doğrultusu, bu doğrultuya paralel ve S_1 yıldızından geçecektir. Düğümler doğrultusunun durum açısı Ω, çizilen bu doğrunun durum açısı olarak ölçülür. Ayrıca enberi noktasının durum açısı olan θ değerini de hesaplamak mümkündür. Şekilden $\lambda = |\theta - \Omega|$ değeri bulunabilir. λ değeri ω açısının izdüşümüne karşılık gelir ve bu iki parametre arasındaki bağıntı Şekil 4.27'dan:

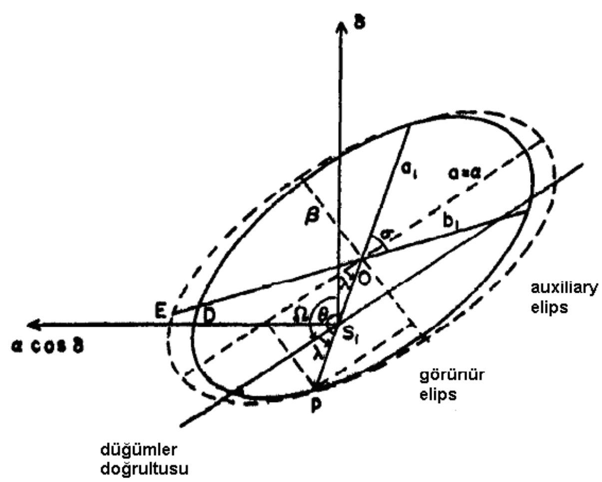
$$\tan\lambda = \tan\omega\cos i$$

olduğu kolaylıkla bulunabilir.

Grafiksel bir yöntem olan Zwiers ve Russell yönteminde yörünge çözümü için OS_1, a_1, α, β, λ parametreleri ölçülen parametrelerdir. Bu parametrelerden yararlanarak sırasıyla e, a, ±i, Ω ve ω ise hesaplanan yörünge parametreleridir.



Şekil 4.27. Görünür yörünge ile gerçek yörünge arasındaki ilişki ve yörünge parametreleri.



Şekil 4.28. Görünür ve asal çemberin izdüşümü olan yardımcı (auxiliary) elips.

Analitik olarak asal çemberin izdüşümü olan yardımcı elipsi çizmeye gerek kalmadan, fakat ona ilişkin bilgileri kullanarak yörünge parametrelerini hesaplamak mümkündür. Bu tür bir hesaplamada $OE=b_2=k \cdot OD=k \cdot b_1$ şeklinde alınır. Görünür elipsin çaplarına ilişkin eksenler a_1, b_1 ve yardımcı elipsin eksenleri ise α ve β olacaktır. Apollonius teoremine göre eğer a_1 ile b_1 arasındaki açı σ ise,

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= a_1^2+b_2^2 = a_1^2+k^2b_1^2 \\ \alpha\beta &= a_1 b_2 \sin\sigma = k a_1 b_1 \sin\sigma \end{aligned}\right\}$$

doğrudur. Bu ifadelerden,

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= a_1^2 + 2ka_1b_1\sin\sigma + k^2b_1^2 \equiv g^2\\ (\alpha-\beta)^2 &= a_1^2 - 2ka_1b_1\sin\sigma + k^2b_1^2 \equiv h^2\end{aligned}\right\}$$

hesaplanabilir. a_1, b_1 ve σ görünür yörünge elipsinden ölçülebilen büyüklüklerdir ve *k* değeri bilindiğinden *g* ve *h* değerleri hesaplanabilir büyüklükler olacaktır. Bu bilgilerden yararlanılarak α ve β parametreleri aşağıdaki bağıntılar yardımıyla hesaplanabilmektedir.

$$a = \alpha = \frac{1}{2}(g+h)\,, \quad \beta = \frac{1}{2}(g-h)$$

Yukarıdaki ifadelerin kullanılması ile benzer bir yöntemle *cos i* teriminden $\pm$i yörünge eğim açısını da hesaplamak mümkündür.

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{g-h}{g+h}$$

Enberi noktasının α ve β ya göre koordinatları $a_1\cos\lambda$ ve $a_1\sin\lambda$ dır. λ açısı a_1 ile α arasındaki açıdır. Enberi noktası, yardımcı elips üzerinde öyle bir noktadır ki elipse ilişkin aşağıdaki denklemleri sağlaması gerekmektedir.

$$\frac{a_1^2\cos^2\lambda}{\alpha^2} + \frac{a_1^2\sin^2\lambda}{\beta^2} = 1 = \sin^2\lambda + \cos^2\lambda$$

$$\left(\frac{a_1^2}{\beta^2} - 1\right)\sin^2\lambda = \left(1 - \frac{a_1^2}{\alpha^2}\right)\cos^2\lambda$$

$$\frac{a_1^2-\beta^2}{\beta^2}\sin^2\lambda = \frac{\alpha^2 - a_1^2}{\alpha^2}\cos^2\lambda$$

$$\tan^2\lambda = \frac{(\alpha^2 - a_1^2)}{\alpha^2}\frac{\beta^2}{(a_1^2-\beta^2)} = \frac{\alpha^2 - a_1^2}{a_1^2-\beta^2}\cos^2 i$$

λ ile ω arasındaki bağıntı: tan λ=tan $\omega\cdot$cos i şeklinde idi bu bilgiden yararlanarak,

$$\tan^2\omega = \frac{\alpha^2 - a_1^2}{a_1^2-\beta^2}$$

ifadesinden $\pm\omega$ değeri bulunur. Eğer enberi noktasının durum açısı ölçülürse $\lambda = |\theta - \Omega|$ değerini biliyoruz demektir. Ω parametresinin tanımı dikkate alındığında λ ve ω değerlerinden sadece biri doğru olacağından w açısı bulunur.

Sonuç olarak yardımcı elips üzerinde en büyük çap doğrultuları çizilerek a_1, b_1, OS_1, σ, θ_p değerleri ölçüldükten sonra, gerçek yörüngeye ilişkin *e*, *a*, $\pm i$, Ω ve ω parametreleri analitik olarak hesaplanabilen parametreler olmaktadır. Geriye kalan *P* ve *T* parametreleri ise önceki yöntemler dikkate alınarak hesaplanmaktadır.