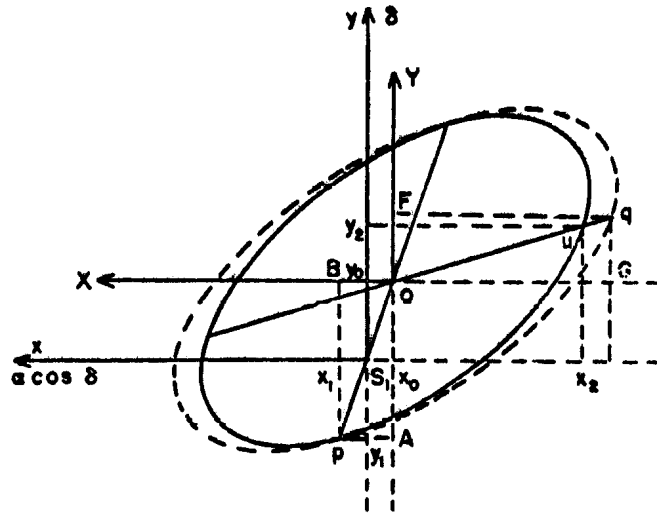


T.N. Thiele ve R.T.A. Innes Yöntemi

Yörünge dışmerkezliği e , Zwiers ve Russell yönteminde olduğu gibi belirlenir ve P ile T ise Kowalsky – Glasenapp yöntemindeki gibi bulunur. Geriye kalan 4 adet yörünge parametresi: a , i , ω ve Ω bir önceki yöntemde olduğu gibi x-ekseni sağaçıklık ve y-ekseni dikaçıklığı temsil edecek şekilde kullanılır.

Yöntemde “doğal elemanlar” olarak adlandırılan A , B , F ve G sembolleri kullanılır. Enberi noktasının koordinatları $p(B,A)$ ve bu doğrultunun eşleneğinin yardımcı elipsi kestiği noktanın koordinatları ise $q(G,F)$ şeklinde gösterilir. Yöntemde koordinat sisteminin merkezi, görünür yörünge elipsinin merkezi olarak dikkate alınır (bkz. Şekil 4.29).

Asal çemberin izdüşümü olan yardımcı elipsin çizilmesi durumunda A , B , F ve G koordinatları elips üzerindeki iki noktadan okunur. Parametrelerin birimleri yay-saniyesidir.



Şekil 4.29. Thiele ve Innes yöntemindeki görünür yörünge elipsinin merkezine göre p ve q noktalarının koordinatları.

S_1 'e göre ölçülen koordinatların $O(x_0, y_0)$, $p(x_1, y_1)$ ve $u(x_2, y_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu bilgiden yararlanarak,

$$e = \frac{OS_1}{Op} = \sin \varphi = \frac{x_0}{x_0 - x_1} = \frac{y_0}{y_0 - y_1}$$

yörünge dışmerkezliği olan e değeri bulunabilir. Daha güvenilir dışmerkezlik değeri hesabında, bulunan e değeri üzerinde çeşitli düzeltmeler uygulanmalıdır. φ açısının işlemlere girmesinden yararlanarak orantı katsayısı hesaplanabilir,

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = 1 - e^2, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - e^2}$$

ve buradan,

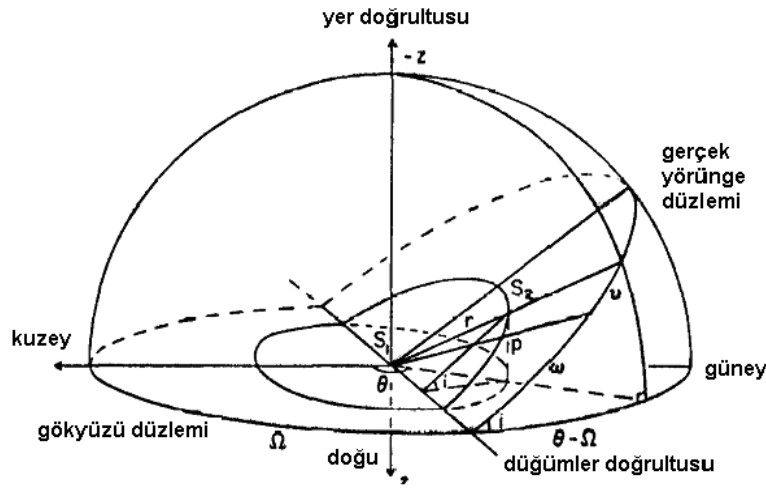
$$k = \sec \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

ρ ve q noktalarına ilişkin koordinatlar artık ölçümlerden hesaplanabilir.

$$\left. \begin{aligned} A &= y_1 - y_0 = \delta_1 - \delta_0 \\ B &= x_1 - x_0 = \alpha_1 \cos \delta_1 - \alpha_0 \cos \delta_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F &= (y_2 - y_0)k = (y_2 - y_0) \sec \varphi \\ G &= (x_2 - x_0)k = (x_2 - x_0) \sec \varphi \end{aligned} \right\}$$

Burada sadece iki noktanın koordinatları kullanılmıştır. Merkezin koordinatlarını da kullanmak mümkündür, fakat merkezin koordinatları için belirlenecek olan değerlerin hatası daha yüksek olacaktır.



Şekil 4.30. Gerçek yörünge ile görünür yörünge arasındaki ilişki

Şekil 4.30 dikkate alındığında analitik olarak aşağıdaki gibi işlemlere devam edilir. ρ ve θ parametreleri kullanılan parametrelere aşağıdaki gibi bağlıdır;

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \rho \cos \theta \\ \alpha \cos \delta &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos(\theta - \Omega) &= r \cos(\nu + \omega) \\ \rho \sin(\theta - \Omega) &= r \sin(\nu + \omega) \cos i \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Yukarıda verilen denklemlerin açılımı yapıldığında,

$$\rho \cos \theta \cos \Omega + \rho \sin \theta \sin \Omega = r \cos \nu \cos \omega - r \sin \nu \sin \omega$$

$$\rho \sin \theta \cos \Omega - \rho \cos \theta \sin \Omega = r \cos \nu \cos \omega \cos i + r \cos \nu \sin \omega \cos i$$

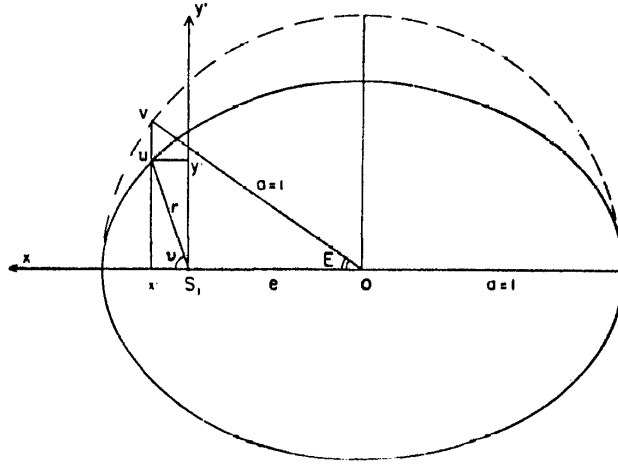
bulunur. Sırasıyla $\cos \Omega$ ve $(-\sin \Omega)$ ile çarpıldıktan sonra toplamları alındığında,

$$\left. \begin{aligned} \delta &= r \cos \nu (+ \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) \\ &+ r \sin \nu (- \sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i) \\ \alpha \cos \delta &= r \cos \nu (+ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \\ &+ r \sin \nu (- \sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

ifadesine ulaşılır. İkinci satırdaki ifade ise sırasıyla $\sin \Omega$ ve $\cos \Omega$ terimleri ile çarpımlarının toplamları sonucunda bulunmuştur. Şimdi bilinen dinamik elemanlar olan P , T ve e için,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{r}{a} \cos \nu = \cos E - e \\ y' &= \frac{r}{a} \sin \nu = \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

yazabiliriz. Bu parametreler gerçek yörünge düzleminde bulunan, yarı-büyük eksen uzunluğu birim ($a=1$) olan bir elips için geçerli olan koordinatlarıdır (Şekil 4.31).



Şekil 4.31. Belirli bir e dışmerkezliğe sahip birim yörünge elipsi

Belirli bir e dışmerkezliği için E eksantrik anomali açısının bilinmesi durumunda,

$$M_a = E - e \sin E = \frac{2\pi}{P}(t - T)$$

ifadesinden M_a ortalama anomali açısını hesaplamak mümkündür. M_a değeri yörünge dönemi P , enberi noktasından geçiş zamanı T ve gözlem zamanı t 'ye ve doğal olarak E eksantrik açısına bağlı bir büyüklüktür. Kepler denkleminin çözümü günümüz bilgisayarları yardımıyla kolaylıkla yapılabilmektedir. Fakat yöntem kullanılırken bu hesaplamaların yapılmasında yaşanan güçlükler nedeniyle farklı bir uygulama dikkate alınmıştır. Union Circ. No. 71'de yayınlandığı şekliyle farklı dışmerkezlik ve M_a açıları için birim yörünge elipsine ilişkin x' ve y' koordinatlarını veren bir tablo yaratılabilir. Bunu

$$x', y' = f(e, M_a)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Çizelge 4.2. Schlesinger, F. Ve Udick, S. tarafından hazırlanmış olan “Eliptik Yörüngeler için Gerçek Anomali Tablosu”. Kaynak. 1912PAIO...2..155S.

158

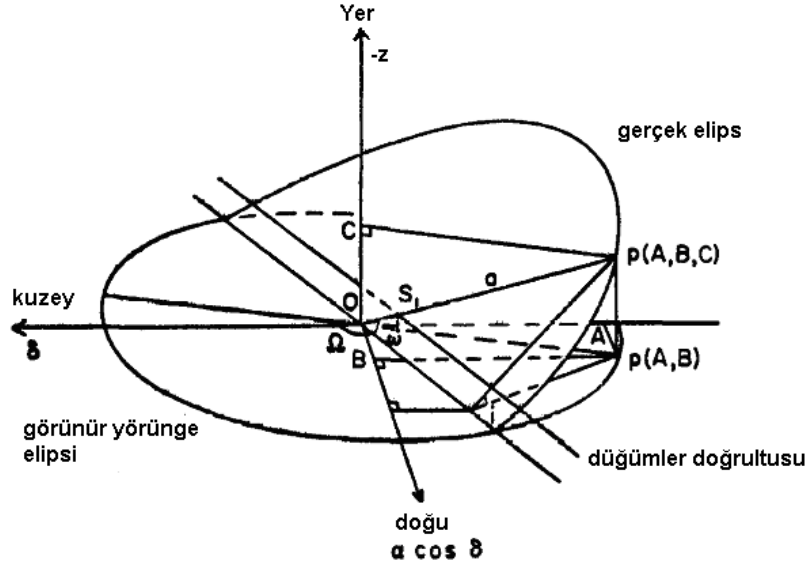
PUBLICATIONS OF THE ALLEGHENY OBSERVATORY.

<i>M</i>	<i>e</i> = .01		<i>e</i> = .02		<i>e</i> = .03		<i>e</i> = .04		<i>e</i> = .05		<i>e</i> = .06		<i>e</i> = .07		<i>M</i>
0°	°	Δ	°	Δ	°	Δ	°	Δ	°	Δ	°	Δ	°	Δ	0°
1	0.00	1.02	0.00	1.04	0.00	1.06	0.00	1.08	0.00	1.11	0.00	1.13	0.00	1.15	1
2	1.02	1.02	1.04	1.04	1.06	1.06	1.08	1.09	1.11	1.10	1.13	1.13	1.15	1.16	2
3	2.04	1.02	2.08	1.04	2.12	1.07	2.17	1.08	2.21	1.11	2.26	1.13	2.31	1.15	3
4	3.06	1.02	3.12	1.04	3.19	1.06	3.25	1.09	3.32	1.11	3.39	1.13	3.46	1.15	4
5	4.08	1.02	4.16	1.04	4.25	1.06	4.34	1.08	4.43	1.10	4.52	1.13	4.61	1.16	5
6	5.10	1.02	5.20	1.05	5.31	1.06	5.42	1.08	5.53	1.11	5.65	1.13	5.77	1.15	6
7	6.12	1.02	6.25	1.04	6.37	1.06	6.50	1.09	6.64	1.10	6.78	1.12	6.92	1.15	7
8	7.14	1.02	7.29	1.04	7.43	1.07	7.59	1.08	7.74	1.11	7.90	1.13	8.07	1.15	8
9	8.16	1.02	8.33	1.04	8.50	1.06	8.67	1.08	8.85	1.10	9.03	1.13	9.22	1.16	9
10	9.18	1.02	9.37	1.04	9.56	1.06	9.75	1.09	9.95	1.11	10.16	1.13	10.38	1.15	10
11	10.20	1.02	10.41	1.04	10.62	1.06	10.84	1.08	11.06	1.10	11.29	1.13	11.53	1.14	11
12	11.22	1.02	11.45	1.04	11.68	1.06	11.92	1.08	12.16	1.10	12.42	1.13	12.67	1.15	12
13	12.24	1.02	12.49	1.04	12.74	1.06	13.00	1.08	13.27	1.11	13.54	1.13	13.82	1.15	13
14	13.26	1.02	13.53	1.04	13.80	1.06	14.08	1.08	14.37	1.10	14.67	1.12	14.97	1.15	14
15	14.28	1.02	14.57	1.04	14.86	1.06	15.16	1.09	15.47	1.11	15.79	1.13	16.12	1.15	15

Gerçek çözüm ile aradaki tek fark gerçek yörünge için bu koordinatların *a* yörünge yarı-büyük eksen uzunluğu ile çarpılması gerektiğidir. Bu aşamada aşağıdaki tanımları yaparsak,

$$\left. \begin{aligned} A &= a(+\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) \\ B &= a(+\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \\ F &= a(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i) \\ G &= a(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \end{aligned} \right\}$$

Burada *A*, *B* ve *C* katsayıları (ki *C* katsayısı burada bulunmamaktadır) gerçek elips üzerinde merkez-enberi uzaklığının üç eksenli koordinat sistemi üzerindeki izdüşümünü göstermektedir. Benzer şekilde *F*, *G* ve *H* (ki *H* katsayısı burada bulunmamaktadır) katsayıları ise gerçek elipse ait asal çember ile yarı-küçük eksenin kesiştiği noktayı gösterir. *C* ve *H* katsayıları ise bakış doğrultumuzdaki büyüklükler olarak karşımıza çıkacaktır. Yukarıdaki ifadelerin doğruluğunu Şekil 4.32'nin incelenmesi ile ortaya koymak mümkündür. Örneğin sağaçıklık yönündeki *B* sabiti için bu irdelemeyi yapabiliriz.



Şekil 4.32. A , B ve C sabitleri enberi noktasının koordinatlarına ilişkin sabitlerdir.

Enberi noktasının sağaçıklık eksenini üzerindeki izdüşümü B noktasıdır. Düğümler doğrultusuna paralel olan ve merkezden geçen merkez-enberi uzunluğunun izdüşümünü alabiliriz. Bu durumda $(a \cos \omega)$ bulunur ki sağaçıklık eksenini üzerindeki izdüşümü $(a \cos \omega \sin \Omega)$ olacaktır. Ayrıca Şekil 4.32'den $(a \sin \omega)$ 'nin i açısına göre izdüşümü olduğunu ve bu nedenle gökyüzü düzlemi üzerindeki izdüşümün $(a \sin \omega \cos i)$ olduğu görülebilir. Bu durumda sağaçıklık eksenini üzerindeki enberi noktasının konumu için $(a \sin \omega \cos i \cos \Omega)$ ifadesi elde edilir. Şekilden ayrıca elde edilmiş olan bu ifadelerin işaretlerinin de doğru olduğunu görmek mümkündür.

A/a , B/a , C/a ve F/a , G/a , H/a değerleri sırasıyla gerçek yörünge elipsinin üç eksenli koordinat sistemindeki yarı-büyük ve yarı-küçük eksen doğrultusundaki yön kosinüsleridir. Daha önce gördüğümüz (79) nolu formüllerin, normal noktalardan ölçülen koordinatlar için yazılması durumunda,

$$\left. \begin{aligned} y = \delta &= Ax' + Fy' \\ x = a \cos \delta &= Bx' + Gy' \end{aligned} \right\}$$

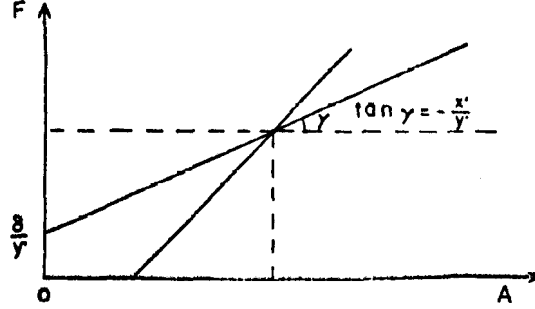
ifadesi elde edilir. Sağaçıklık ve dikaçıklık için gözlenen konumlar, gerçek yörünge düzleminde birim elipsin x' ve y' koordinatlarının doğrusal fonksiyonlarıdır. A , B , F ve G katsayıları elipsin boyutunu, yönelimini ve izdüşümünü belirleyen katsayılardır. Buradaki problem bu sabitlerin ne şekilde hesaplanacağıdır.

Tek bir normal noktanın dikaçıklık ölçümü için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz,

$$F = -\frac{x'}{y'} A + \frac{\delta}{y'}$$

Bu ifade $y=ax+b$ biçiminde olan bir doğru denklemdir. İkinci bir normal noktanın dikaçıklık ölçümü için de yukarıdakine benzer başka bir doğru denklemi elde edilir (Şekil 4.33). Bu doğrular birbirleri ile üst üste

çakışmaz, çünkü bu noktaların δ , x' ve y' değerleri birbirinden farklıdır. Fakat farklı normal noktalar için elde edilen doğrular tek bir nokta etrafında kesişirler. Gözlemsel verilerin hatası ne kadar küçük ise doğruların kesişme noktaları da o kadar iyileşir. İki gözlem verisinin kullanılması durumunda A ve F katsayıları bu iki denklemin köklerini gösterecektir.



Şekil 4.33. A ve F katsayılarının iki farklı normal nokta için gözlenen dikaçıklık değerleri dikkate alınarak belirlenmesi. B ve G katsayıları da benzer bir yöntemle sağaçıklık için hesaplanabilir.

Aynı normal noktaların sağaçıklık değerlerinden benzer bir yöntemle B ve G katsayıları bulunabilir. Ayrıca diğer normal noktalar için benzer doğrular oluşturmak mümkündür. Doğruların tamamı belirli bir nokta etrafından kesişirler. Kesişme noktası en iyi A , F ve benzer şekilde B ve G katsayılarının bulunmasını sağlar. Uygulamada ise bu işlemler en küçük kareler yöntemi kullanılarak çözülür ve A , B , F , G noktalarının olası hata değerleri de bu sayede hesaplanır. Bu amaçla bütün gözlemsel noktalara ilişkin koordinat bilgileri kullanılır. Eğer a değerine bölünürse bu durumda birim elipsin gökyüzü düzlemi üzerindeki izdüşüm koordinatlarına ulaşılır.

A , B , F ve G katsayılarının belirlenmesinden sonra gerçek yörünge elipsine ait parametrelerin hesaplanması için,

$$\begin{aligned} A + G &= a \cos(\omega + \Omega) + a \cos(\omega + \Omega) \cos i \\ &= a \cos(\omega + \Omega)(1 + \cos i) \\ &= 2a \cos(\omega + \Omega) \cos^2\left(\frac{1}{2}i\right) \end{aligned}$$

Bu dönüşüm için $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ ifadesinden yararlanılmıştır. Yukarıda verilen ifadelerin farklı kombinasyonları için;

$$\begin{aligned} A + G &= 2a \cos(\omega + \Omega) \cos^2 \frac{1}{2}i \\ A - G &= 2a \cos(\omega - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$B - F = 2a \sin(\omega + \Omega) \cos^2 \frac{1}{2} i$$

$$-B - F = 2a \sin(\omega - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler yörünge parametrelerinin hesaplanmasında kullanılan temel denklemlerimiz olacaktır. Uygun koşula sahip olan denklemlerin birbirleri ile orantısı alındığında,

$$\left. \begin{aligned} \tan(\omega + \Omega) &= \frac{B - F}{A + G} \\ \tan(\omega - \Omega) &= \frac{B + F}{G - A} \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Denklemlerin sağ tarafındaki ifadelerin sayısal değerleri bilindiğinden her iki denklemden $(\omega + \Omega)$ ve $(\omega - \Omega)$ bulunur ve buradan ω ve Ω ayrı ayrı hesaplanabilir. Yörüngeye ilişkin bu parametrelerin bilinmesi durumunda ise,

$$\tan^2 \frac{1}{2} i = \frac{(A - G) \cos(\omega + \Omega)}{(A + G) \cos(\omega - \Omega)} = \frac{(B + F) \sin(\omega + \Omega)}{(F - B) \sin(\omega - \Omega)}$$

yörüngeyi bakış doğrultumuza dik düzlem ile yaptığı açı değerini $\pm i$ olarak hesaplayabiliriz.

Yukarıdaki A, B, F ve G sabitlerinden birini kullanarak (81) nolu denklemden a yarı-büyük eksen uzunluğunu yay-saniyesi birimlerinde hesaplayabiliriz. Bu işlemi dört ayrı katsayı için tekrarlayarak birbirlerinden az da olsa farklı olan dört adet a değeri bulunacaktır. Bu değerlerin ortalaması alındığında daha doğru bir a değerimiz olacaktır.

a yarı-büyük eksen uzunluğunu farklı bir yöntem kullanarak da hesaplamak mümkündür. Bunun için asal çemberin izdüşümü olan elipteki eksenler olan $a = \alpha$ ile $a \cos i = \beta$ ve Apollonius teoremi kullanılır.

$$a^2 + a^2 \cos^2 i = pO^2 + qO^2 = (A^2 + B^2) + (F^2 + G^2) = 2u$$

$$a \bullet a \cos i = \begin{vmatrix} A & B \\ F & G \end{vmatrix} = AG - BF = v$$

Yukarıdaki ifadeler düzenlendiğinde,

$$a^2(1 + \cos^2 i) = a^2\left(1 + \frac{v^2}{a^4}\right) = a^2 + \frac{v^2}{a^2} = 2u$$

$$a^4 - 2ua^2 + v^2 = 0$$

ifadesi bulunur. İkinci dereceden bir ifade olarak dikkate alındığında kökleri,

$$a^2 = \frac{2u \pm \sqrt{(4u^2 - 4v^2)}}{2} = u \pm \sqrt{(u+v)(u-v)}$$

şeklinde hesaplanabilir. A, B, F, G katsayıları bilindiğinden u ve v değerleri de biliniyor demektir. Sonuç a^2 olarak hesaplandığından karekökü çift işaretli olacaktır. Negatif işaretli kök olması durumunda a^2, u' dan daha küçük olacağından doğru kök olamaz. İlk denklem a^2 değerinin u ile $2u$ arasında bulunması gerektiğini göstermektedir. P ve T parametrelerini kontrol etmek için,

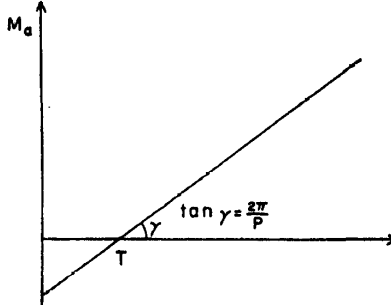
$$\left. \begin{array}{l} Ax' + Fy' = y \\ Bx' + Gy' = x \end{array} \right\}$$

denklemlerinden yararlanılır. Bu iki denklemin kökleri;

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} y & F \\ x & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & F \\ B & G \end{vmatrix}} = \frac{Gy - Fx}{AG - BF}, \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} A & y \\ B & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & F \\ B & G \end{vmatrix}} = \frac{Ax - By}{AG - BF}$$

olarak bulunabilir.

Gözlenen x ve y değerlerini kullanarak, x' ve y' değerlerini elimizdeki normal noktalar için bulabiliriz. Bu noktalar için M_a değeri hesaplanır. M_a değerleri zamana göre doğrusal olarak değişim gösterir. $M_a = (t-T)2\pi/P$ denkleminde $M_a=0$ için T değeri hesaplanır (Şekil 4.34).



Şekil 4.34. Ortalama anomali açısı ile zaman arasındaki ilişki denberi noktasından geçiş zamanı T ve dolanma dönemi P bulunabilir.

ÖDEV 3: Thiele – Innes Yöntemi. Katsayıları $A=0''.18102$, $B=0''.53068$, $F=0''.97464$ ve $G=0''.86849$ olarak verilen bir sistem için a, i, Ω ve ω yörünge parametrelerini hesaplayınız. Not. Yörünge dışmerkezliği $e=0.26$ olarak alınız.

ÇÖZÜM 3:

$$\omega = 11^\circ.13094 + 270^\circ = 281^\circ.1309$$

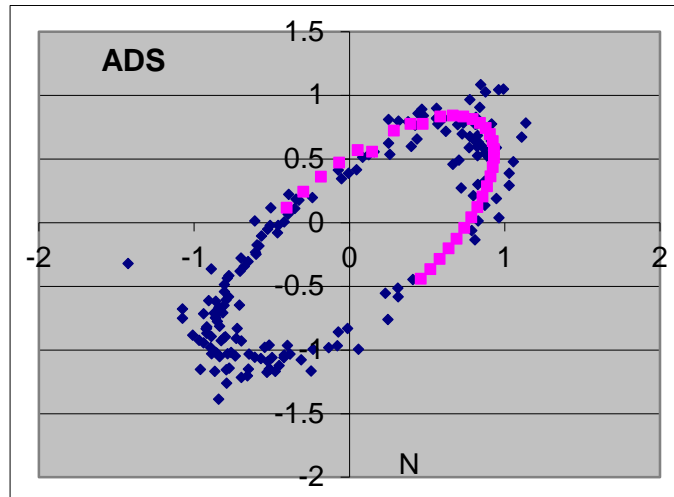
$$\Omega = -43^\circ.01517 + 90^\circ = 46^\circ.01517$$

$$i = 112^\circ.5299$$

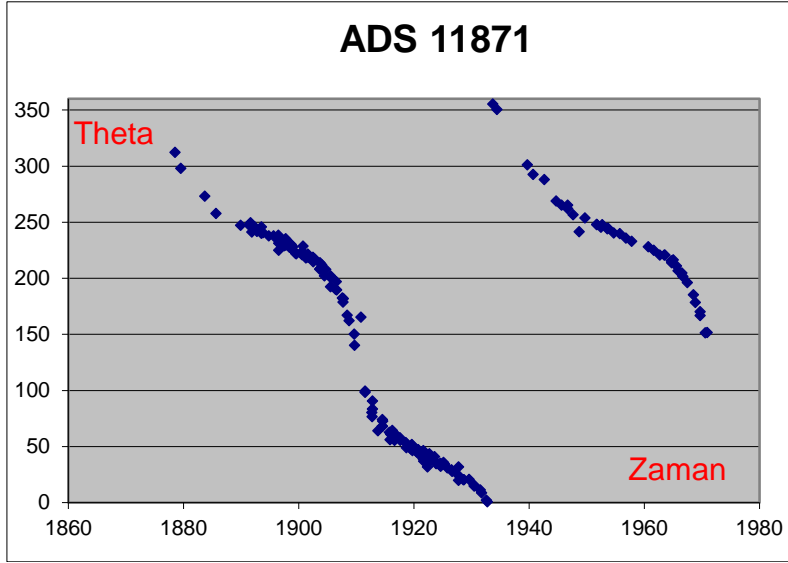
$$a = 1''.326713 \quad (u=1''.009294, v=-0''.67444)$$

TABLE I.

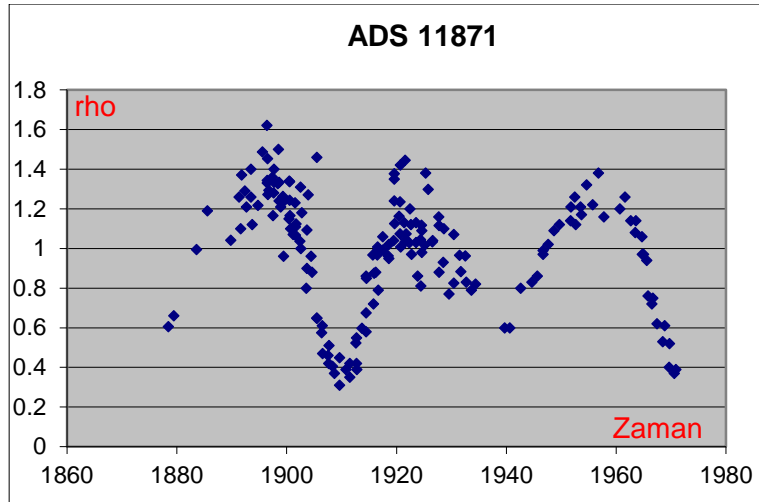
PROVISIONAL ORBITAL ELEMENTS ADS 11871 = β 648	
MODIFIED ZWIFERS' METHOD	THIELE-INNES METHOD
	Campbell Elements
T = 1849.47	T = 1972.54
P = 61 ^m 25	P = 61 ^m 27
n = 5 ^s 878	n = 5 ^s 875
e = 0.29	e = 0.26
a = 1 ["] 26	a = 1 ["] 33
i = 111 ^o 83	i = 112 ^o 53
Ω = 46 ^o 71	Ω = 46 ^o 01
ω = 279 ^o 72	ω = 281 ^o 13
Param. apparent ellipse	Thiele-Innes Constants
A = -2.65392	A = -0 ["] 18102
B = -2.35902	B = 0.53068
H = 1.82003	F = 0.97464
G = 0.40369	G = 0.86849
F = -0.43196	
Param. auxiliary ellipse	
A' = -3.01162	
B' = -2.75189	
H' = 2.17773	
C' = 0.50693	
F' = -0.54244	



Şekil 4.35. ADS11871 sisteminin görsel yörüngesi



Şekil 4.36. ADS11871 sisteminin zamana göre θ açısındaki değişim



Şekil 4.37. ADS11871 sisteminde zamana göre ρ değişimi