

## K. Schwarzschild ve W. Zurhellen Yöntemi

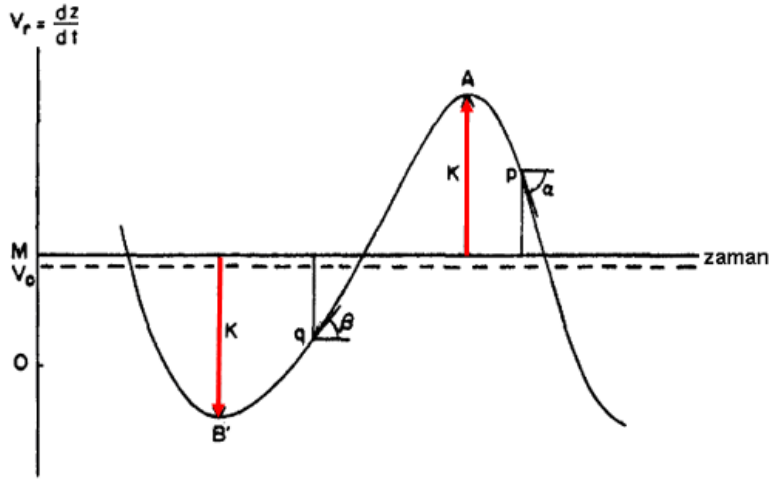
Bir önceki yöntemde dikine hız eğrisinin

$$K e \cos \omega = \frac{1}{2}(A - B)$$

gibi bir sabit ve  $K \cos(\nu + \omega)$  gibi periyodik iki kısımdan oluştuğunu gördük. Bu yöntemde  $V_0$  eksenine göre  $K \cos \omega$  sabiti kadar kaydırılmış yeni bir eksen kullanılır. Bu yeni eksene *MEDYAN* eksenı adı verilir. Bu eksen dikkate alındığında dikine hız değişimine ilişkin denkleminiz (Şekil 5.23);

$$V_r = K \cos(\nu + \omega)$$

olacaktır.



Şekil 5.23. *M* (medyan) eksenli dikine hız eğrisi.

Maksimumda iken hız  $+K$  ve minimumda iken ise  $-K$  olacaktır. Medyan eksenı tam olarak maksimum ve minimum hızların ortasından geçen bir eksendir. Bu ise daha önce gördüğümüz gibi  $K$  nın yarıgenlik olmasını gerektirir. Formülden  $V_r$ 'nin  $(\nu + \omega)$ 'ya göre grafiğinin bir kosinüs eğrisi biçiminde değişim göstermesi gerektiği görülebilir. Bu nedenle  $V_r$ , x ekseninde  $\omega$  kadar kaymış olmalıdır. Ayrıca  $\nu$  değerinin zamana bağıllığı doğrusal olmayacağından,  $V_r$  değişimi bozulmuş bir kosinüs eğrisi olmalıdır. Dairesel yörüngeye sahip sistemlerde  $e=0$  olduğundan  $\nu$  nün zamana göre değişimi doğrusaldır ve dikine hız değişimi tam bir kosinüs eğrisi olur.

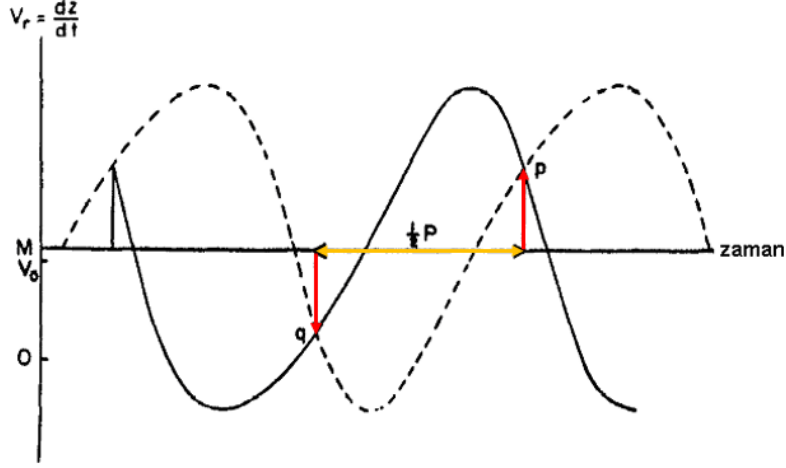
Enberi ve enöte noktaları için yukarıdaki denklemden;

$$p = K \cos \omega \quad \text{ve} \quad q = -K \cos \omega \quad (175)$$

elde edilir. Bu iki nokta, büyüklük olarak aynı fakat işaret olarak ters ve birbirinden  $\frac{1}{2} P$  kadar farklı iki nokta olmalıdır. Genellikle bu şartları sağlayan iki çift nokta dikine hız eğrisi üzerinde bulunur. Fakat bu çiftlerden sadece biri gerçek enberi ve enöte noktalarını gösterecektir. Enberi noktası dikine hız eğrisinin

daha dik olduğu kısımda, enöte noktası ise eğimin daha az olduğu kısımda bulunmalıdır. K. Schwarzschild dikine hız eğrisi üzerinde enberi ve enöte noktalarının belirlenmesi amacıyla Şekil 5.24' de uygulanan yöntemi kullanmıştır.

Yöntem; dikine hız eğrisini saydam bir kâğıda çizerek, zaman ekseninde  $\frac{1}{2} P$  kadar kaydırdıktan sonra şekli  $180^\circ$  döndürülmesini içermektedir. İki şeklin keşiştiği iki nokta bulunur. Bunlardan biri enberi, diğeri ise enöte noktasının olduğu konumu gösterir.



Şekil 5.24. Enberi (p) ve enöte (q) noktasının konumu.

Enberi noktası eğimin daha dik olduğu nokta olacağından aslında işlem son derece basittir. Enberi noktası belirlendiğine göre zaman ekseninden  $T$  enberiden geçiş zamanını da biliyoruz demektir. Ayrıca,

$$K, \quad K \cos \omega = p, \quad K \cos \omega = \frac{1}{2} (A-B)$$

ifadelerine ilişkin sayısal değerleri de biliyoruz demektir.

**Not.** Son ifadenin elde edilebilmesi için  $V_0$  ekseninin bilinmesi veya belirlenmesi gerekmektedir.

Bu durumda,

$$e = \frac{A-B}{2p} \quad \cos \omega = \frac{p}{K} = \frac{-q}{K} = \frac{p-q}{2K}$$

denklemlerini kullanarak  $e$  ve  $\omega$  değerleri hesaplanabilir. İşaretleri doğru belirleyebilmek için  $\alpha = dp/dt < 0$  (eğer  $\omega > 0$  ise) ilave bir bilgi gerekebilir. Yöntemde  $K, V_0, M, p, dp/dt$  ölçülen değerleri göstermektedir ve bu bilgilerden yararlanarak  $P, T, e, \omega$  asini değerleri hesaplanmalıdır.

W. Zurhellen dikine hızlardaki değişim miktarını hesaplayabilmek için aşağıdaki yöntemi kullanmıştır. Burada sadece enberi ve enöte noktaları için bu işlem gösterilecektir.

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{dp}{dt} = -K \sin \omega \left( \frac{dv}{dt} \right)_p \\ \tan \beta &= \frac{dq}{dt} = +K \sin \omega \left( \frac{dv}{dt} \right)_q \end{aligned} \right\} \text{burada } \left( \frac{dv}{dt} \right)_p \left/ \right. \left( \frac{dv}{dt} \right)_q \text{ dır}$$

Kepler'in ikinci yasasına göre  $r^2 \frac{dv}{dt} = h$  idi, bu durumda,

$$a^2(1-e)^2 \left( \frac{dv}{dt} \right)_p = a^2(1+e)^2 \left( \frac{dv}{dt} \right)_q$$

olmalıdır. Bu denklemler yardımıyla,

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = -\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} = -d^2$$

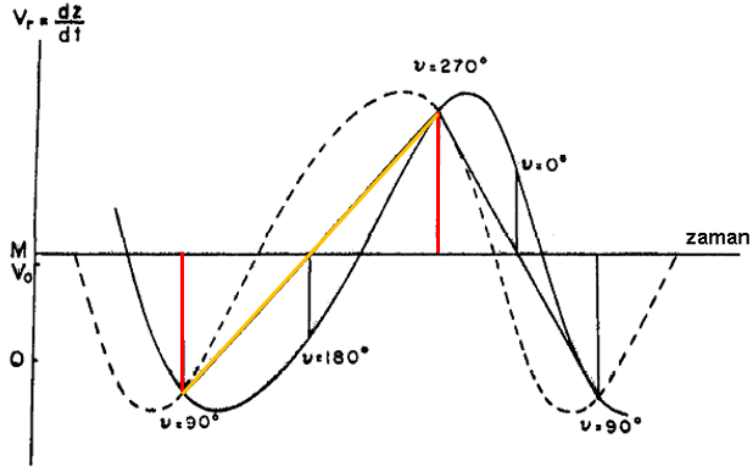
$$d = \sqrt{-\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}}, \quad e = \frac{d-1}{d+1}$$

denklemden dışmerkezlik değeri  $e$  bulunur.

Yörünge üzerinde  $v=90^\circ$  ve  $-90^\circ$  olan iki nokta (parametre ucu) üzerinde işlem yapabiliriz (Şekil 5.21). Bu noktalara karşılık gelen dikine hız değerleri,

$$\left. \begin{aligned} V_{r1} &= K \cos(+90 + \omega) = -K \sin \omega \\ V_{r2} &= K \cos(-90 + \omega) = +K \sin \omega \end{aligned} \right\}$$

olmalıdır. Ayrıca parametre uçları için,  $V_{r1} = -V_{r2}$ ,  $E_1 = -E_2$ ,  $M_1 = -M_2$ ,  $t_1 - T = T - t_2$  olduğu da bilinmektedir. Bu özel konumlar (noktalar) medyan eksenine ve enberi noktasından geçiş zamanına göre simetrik olan noktalardır. Bu nedenle dikine hız eğrisini  $180^\circ$  döndürdükten sonra her iki eğriye ait enberi noktalarının çakışması sağlanıncaya kadar kaydırma işlemi ile bu noktaların konumları bulunur. İki eğrinin kesiştiği noktalar  $v = \pm 90^\circ$  noktalarının konumlarını gösterir.

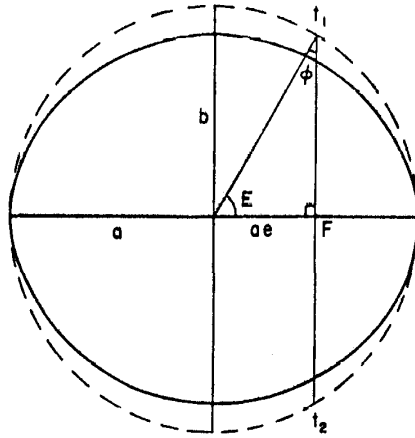


Şekil 5.25. Gerçek anomali açısı  $90^\circ$  ve  $270^\circ$  olduğu noktaların belirlenmesi.

Bu noktaları birleştiren doğruların zaman eksenini kestiği noktalar enberi ve enöte noktalarını medyan ekseninde kesecektir.

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega &= \frac{V_{r1}}{K} = -\frac{V_{r2}}{K} = \frac{V_{r1} - V_{r2}}{2K} \\ \cos \omega &= \frac{p}{K} = -\frac{q}{K} = \frac{p - q}{2K} \\ \tan \omega &= \frac{V_{r1} - V_{r2}}{p - q} \end{aligned} \right\}$$

Bu durumda yukarıdaki denklemler kullanılarak  $\omega$  açısı hesaplanabilir.



Şekil 5.26. Elips üzerinde eksantrik anomali açısı.

Şekil 5.26'dan,

$$E = E_1 = -E_2, \quad e = \sin \varphi = \cos E$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{2\pi}{P}(t_1 - T) = +E - \cos E \sin E \\ M_2 &= \frac{2\pi}{P}(t_2 - T) = -E + \cos E \sin E \end{aligned} \right\}$$

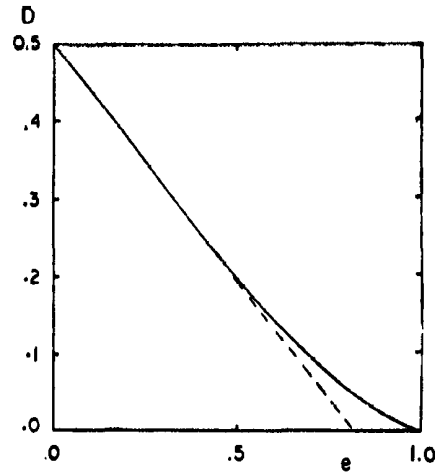
yazabiliriz. İki ifade arasında fark alınırsa;

$$M_1 - M_2 = \frac{2\pi}{P}(t_1 - t_2) = 2E - 2 \cos E \sin E = 2E - \sin 2E$$

elde edilir. Belirli bir dışmerkezlik değeri için  $E$  değeri hesaplanabildiğinden  $M_1 - M_2$  ve  $t_1 - t_2$  elde edilebilir değerlerdir. Farklı dışmerkezlik değerleri için  $t_1 - t_2$  ye göre ya da evreye göre farkı olan  $(t_1 - t_2)/P$  ye göre bir çizelgeden yararlanmak mümkündür. Dairesel yörüngeler için bu fark  $\frac{1}{2}$  ye eşit olmalıdır.

$$D - \frac{1}{2} = \frac{t_1 - t_2}{P} = -\frac{1}{2}$$

Bu ifadeye evre farkı adı verilir.  $e < 0.5$  için doğrusal bir değişim gösterdiği belirlenmiştir. Küçük  $e$  değerleri için Kepler'in ikinci yasasından (Şekil 5.27'den) görülebilir.



Şekil 5.27. Evre farkı ile dışmerkezlik arasındaki bağıntı

İlk yaklaşım olarak evre kaymasının,

$$D = \frac{t_1 - t_2}{P} = \frac{\frac{1}{2} \pi ab \pm ae2b}{\pi ab} = \frac{1}{2} \pm \frac{2e}{\pi}$$

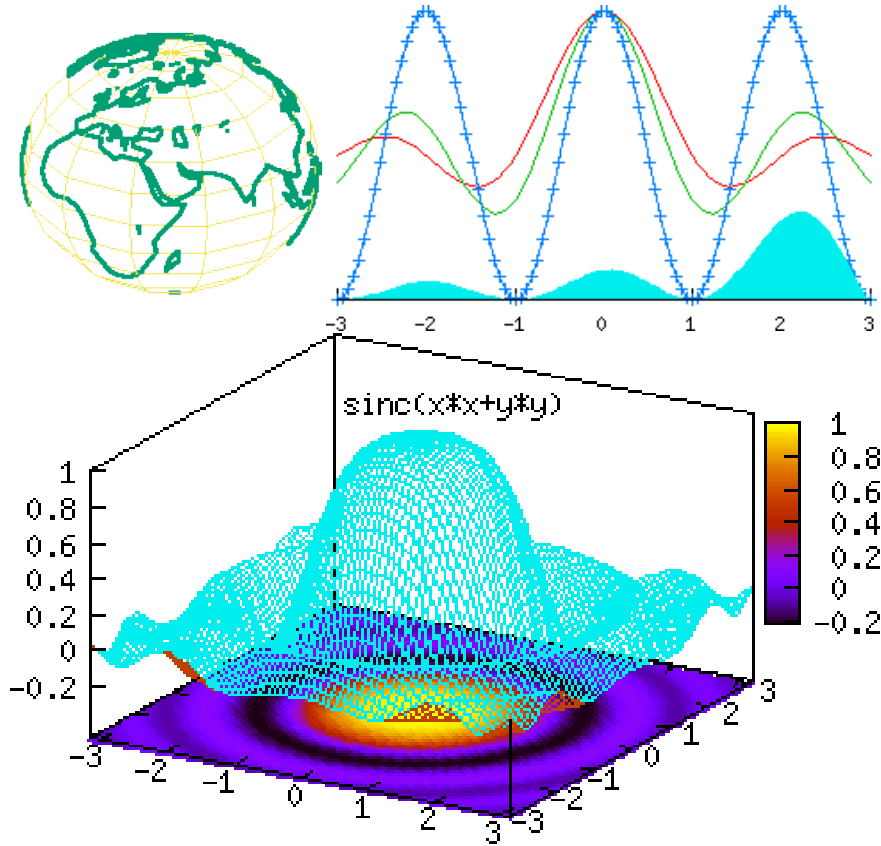
$$e = \frac{\pi}{2} \left| D - \frac{1}{2} \right| \quad (\text{Not: } \pi/2 = 1.57079 \text{ değerine sahiptir})$$

Daha iyi bir yaklaşım olarak  $e = 1.63 \left| D - \frac{1}{2} \right|$  kullanılır. Bu ifade yardımıyla  $e$  değeri

hesaplanabilmektedir. Ayrıca dışmerkezlik değerinin belirlenmesi amacıyla R.H. Curtis tarafından diferansiyel bir yöntem geliştirilmiştir.

### Kullanılması Önerilen Programlar

- MS Excel
- Oakdale Engineering (DataFit): <http://www.curvefitting.com>
- gnuplot: <http://www.gnuplot.info/> (V4.2 sürümünün büyüklüğü 3.785 Kb. Yeni sürümü V4.6.2 9.9 Mb)



Şekil 5.28. Gnuplot ile çizilmiş çeşitli şekiller.

### J.Wilking-H.N.Russell Yöntemi

Yöntem, yörünge dışmerkezliğinin küçük olması durumunda dikine hız eğrisinin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılabilir. Yörünge dairesel olması durumunda dikine hız eğrisinin kosinüs eğrisine benzediğini biliyoruz. Artan dışmerkezlik değerine göre kosinüs eğrisinin biçimi bozulur ve bu doğrudan dışmerkezlik değerine bağlıdır. Bu nedenle dışmerkezlik değerini, argüman olarak iki kez içeren bir ifade yazarak,  $e$  değerinin bu katsayılarla bağlı olmasını bekleyebiliriz.

$$V_r = A_0 + A_1 \cos(nt + \alpha_1) + A_2 \cos(2nt + \alpha_2)$$

$P$  dolanma dönemi bilindiğinden  $n$  değeri bilinmektedir. Ayrıca her gözlem noktası için  $t$  zamanı da bilinmektedir. Buradaki ilk problem  $A_0, A_1, A_2, \alpha_1$  ve  $\alpha_2$  katsayılarının bulunmasıdır. Bunun için aslında dikine hız eğrisi üzerinde toplam 5 adet noktanın dikkate alınması yeterlidir.

Sabitlerin hesaplanmasında Fourier analizi veya en küçük kareler yöntemi kullanılması durumunda çok daha duyarlı sonuçlar elde edilebilir. Böylelikle çözümde gözlemsel olarak elde edilmiş olan bütün noktalar kullanılmış olur.

Katsayıların belirlenmesi (Örnek): Excel uygulaması

Bir sonraki adımdaki problemimiz, bu katsayıların sisteme ilişkin parametrelere nasıl bağlı olduğunun belirlenmesidir.

$$z = r \sin(\nu + \omega) \sin i = r \sin i \{ \sin \nu \cos \omega + \cos \nu \sin \omega \}$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin i \left\{ \cos \omega \frac{d}{dt}(r \sin \nu) + \sin \omega \frac{d}{dt}(r \cos \nu) \right\}$$

yazabiliriz. Türevi alınacak ifadelerin seri açılımları aşağıdaki gibidir;

$$r \sin \nu = a \sin M_a + \frac{1}{2} a e \sin 2M_a + \dots$$

$$r \cos \nu = \frac{3}{2} a e + a \cos M_a + \frac{1}{2} a e \sin 2M_a + \dots$$

$t=0$  anındaki ortalama anomali açısı  $M_0$  ise,

$$M_a = n(t - T), \quad M_0 = -nT, \quad M_a = M_0 + nt, \quad \frac{dM_a}{dt} = n$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeden yararlanarak,

$$\frac{d}{dt}(r \sin \nu) = +na(\cos M_a + e \cos 2M_a)$$

$$\frac{d}{dt}(r \cos \nu) = -na(\sin M_a + e \sin 2M_a)$$

olacaktır. Bu ifadelerin kullanılması durumunda,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= na \sin i (\cos \omega \cos M_a + e \cos \omega \cos 2M_a - \sin \omega \sin M_a - e \sin \omega \sin 2M_a) \\ &= na \sin i \{ \cos(\omega + M_a) + e \cos(\omega + 2M_a) \} \\ &= na \sin i \{ \cos(\omega + M_0 + nt) + e \cos(\omega + 2M_0 + 2nt) \} \end{aligned}$$

ve buradan,

$$V_r = V_0 + \frac{dz}{dt}$$

olarak ifademizi kullanabiliriz. Fourier serisi ile karşılaştırdığımızda,

$$V_0 = A_0$$

$$na \sin i = A_1, \quad \omega + M_0 = \alpha_1$$

$$nea \sin i = A_2, \quad \omega + 2M_0 = \alpha_2$$

olduğu görülür. İfadelerimizi yörünge parametrelerini verecek şekilde tekrar düzenlersek,

$$A_0 = V_0$$

$$a \sin i = \frac{A_1}{n}, \quad M_0 = \alpha_2 - \alpha_1 = -nT$$

$$e = \frac{A_2}{A_1}, \quad \omega = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

olarak bulunur. Eğer  $P$  dolanma dönemini gün biriminde alırsak, o zaman:

$$a \sin i = 86400 \frac{A_1}{n} = 13751A_1P$$

elde edilir. Sonuç km birimlerinde olacağından uygun birimlere dönüşüm yapmak mümkündür. Bu yöntemde  $A_0, A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  hesaplanarak  $V_0, a \sin i, e, \omega, T$  parametreleri hesaplanabilmektedir. Yöntem  $e < 0.1$  için çok iyi işleyen bir yöntemdir. Bunun anlamı hemen hemen dairesel yörüngeye sahip sistemlerin parametreleri bu yöntemle çok kolay bir şekilde bulunabileceğidir. Russell bu yönteme ikinci dereceden terimleri ilave ederek  $e < 0.3$  için iyi bir duyarlılıkla yörünge parametrelerinin hesaplanabileceğini göstermiştir. Bunun için kullandığı ilave terimler,

$$a' = a \left\{ 1 + \frac{1}{2}e^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \cos 2\omega \right) \right\}$$

$$e' = e \left\{ 1 + \frac{1}{4}e^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \cos 2\omega \right) \right\}$$

$$\omega' = \omega - \frac{1}{6}e^2 \sin 2\omega$$

$$M'_0 = M_0 + \frac{1}{24}e^2 \sin 2\omega$$

şekindedir. Eğer üçüncü dereceden terimler bu yönteme ilave edilirse bu durumda bu yöntem pratik olmaktan çıkmaktadır. Yöntemin avantajı doğrudan gözlemlerin kullanılarak yörünge parametrelerinin herhangi bir çizim yapmadan hesaplanabilmesidir. Ayrıca yöntemin bir başka avantajı, dikine hız eğrisinin maksimumu veya minimumunun bilinmeden de bu parametrelerin bulunabilmesidir. Bu yöntem için diferansiyel düzeltme yöntemi W.J. Luyten tarafından hazırlanmıştır.

### Kütle Fonksiyonu (Tek Çizgili Tayfsal Çift Yıldızlar)

Çift yıldızlar için denge koşulu  $\mathfrak{M}_1 a_1 = \mathfrak{M}_2 a_2$  şeklinde idi, bu denklemden yararlanarak,

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i}, \quad B_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{a_1}{a}$$



yazabiliriz. Kütle olarak güneş kütlesi, yörünge yarı-büyük eksen uzunluğu için astronomi birimi ve dolanma dönemi için yıl birimleri kullanılırsa, Kepler'in üçüncü yasasını,

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{a^3}{P^2}$$

şeklindeki formundan yararlanarak,

$$\left( \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \right)^3 = \frac{a_1^3}{a^3} = \frac{a_1^3}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)P^2}$$

$$\frac{\mathfrak{M}_2^3}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} = \frac{a_1^3}{P^2}$$

Elde edilir.  $a$  yarı-büyük eksen için  $1$  milyon km ve  $P$  dolanma dönemi için gün alınırsa,

$$\frac{a^3}{149.5^3} \frac{365.25^2}{P^2} = \frac{a^3}{25.0P^2}$$

elde edilir. Tayfsal gözlemlerden  $asin i$  elde edilebildiğinden yukarıdaki ifadede  $\sin^3 i$  ile çarpım olmalıdır. Bu nedenle kütleler konusunda bulabileceğimiz ifade kütle fonksiyonu olacaktır ve buradan

$$f(\mathfrak{M}) = \frac{(\mathfrak{M}_2 \sin i)^3}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} = \frac{(a_1 \sin i)^3}{25P^2}$$

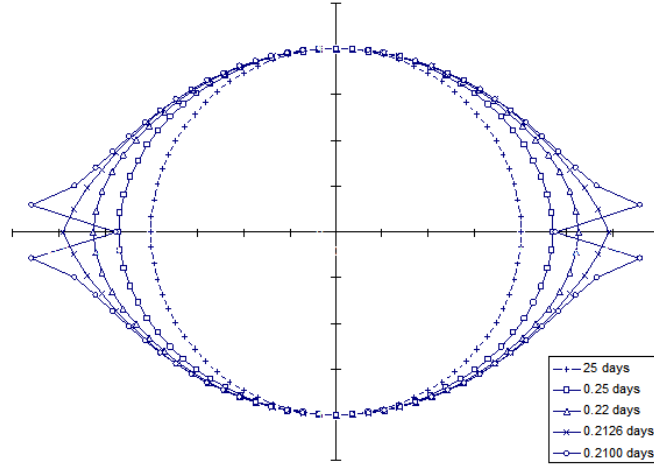
olarak yazabiliriz. Kepler'in üçüncü yasası ise aynı birimlerde,

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{a^3}{25P^2}$$

şeklinde olacaktır.

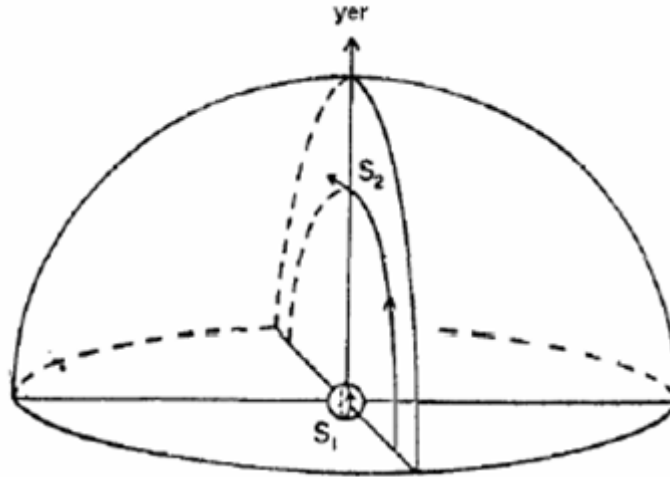
### Dönmenin Dikine Hız'a Etkisi

Yıldızlarda Güneş gibi kendi eksenleri etraflarında dönerler. Dönme nedeniyle yıldızların tayflarında bulunan soğurma çizgilerinin biçimleri değişir. Tayfsal ve aynı zamanda örten bir değişen yıldız için, sönük bileşenin diğerini örtmesinden hemen önce baş bileşenin ancak bir kısmı görülebileceğinden, dikine hız eğrisinde bir artma ve ardından tam minimumdan çıkarken baş bileşenin diğer yarısı görüleceğinden, bakış doğrultumuzdaki dönme hızı nedeniyle dikine hız değerinde bir azalma meydana gelir. Tutulmalar dışında yıldızın her iki yarısı görülebildiğinden soğurma çizgileri daha genişlemiş şekilde görülür.



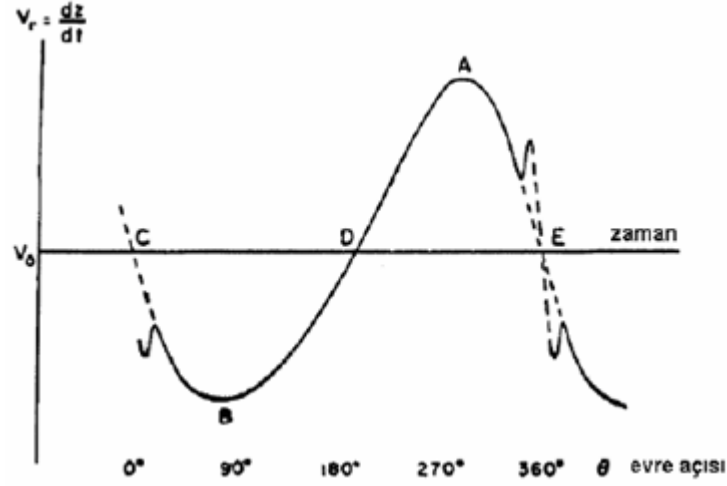
**Şekil 5.29.** Dönmenin yıldızın biçimine olan etkisi

$i$  yörünge eğim açısının yaklaşık  $90^\circ$  olduğu bazı tayfsal çift yıldızlar, aynı zamanda örten değişen yıldızlardır (Şekil 5.30). Tam örtülmenin meydana geldiği an, her iki bileşen bakış doğrultumuz ile aynı doğrultuda bulunur. Bu çiftin dairesel bir yörüngede dolması durumunda radyal doğrultuda bir hız bileşeni olmaz.



**Şekil 5.30.** Yıldızlar için gözlemsel olarak elde edilen bir bulgu, yıldızların dolanma yönleri ile dönme yönlerinin aynı doğrultuda olduğudur.

Bu özel noktalar dikine hız eğrisi üzerinde  $E$  ve  $D$  noktalarına karşılık gelir (Şekil 5.31). Bu iki özel konuma karşılık gelen dikine hız değerleri sistemin kütle merkezinin uzay hızı dikkate alındığında  $V_0$  hızına sahip olmalıdır. Parlak bileşenin örtülmesi, dikine hız eğrisinin azalan kısmına karşılık gelen  $E$  noktasında meydana gelir ve bu noktanın hızı  $V_0$  hızıyla aynıdır.



**Şekil 5.31.** Yıldızın dönmesinin dikine hız eğrisi üzerindeki etkisi. Birinci minimum C ve E noktalarında meydana gelmektedir.

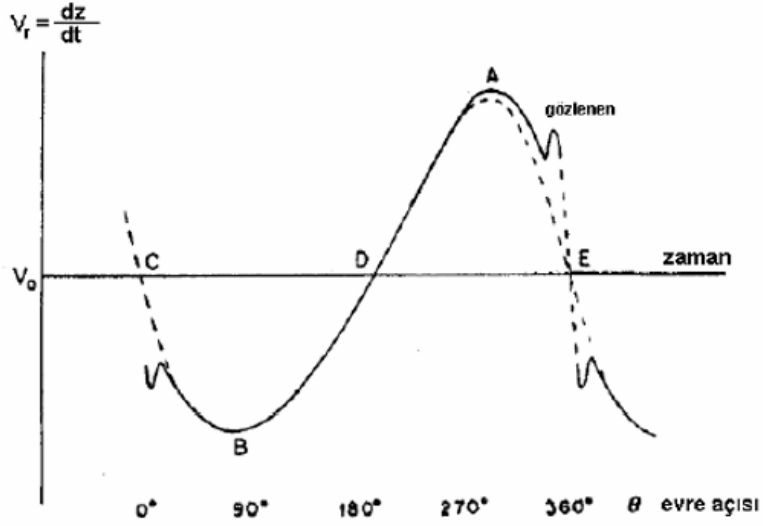
Yörüngenin eliptik olması durumunda bu çıkarım doğru değildir.  $i=90^\circ$  için tam tutulma ortasında yarıçap vektörü ile bakış doğrultumuz çakışık olacak, fakat bakış doğrultumuzdaki hız vektörü  $V_1$  gibi bir hız bileşenine sahip olur. Genel olarak sistemlerin küçük dışmerkezliğe sahip yörüngelerde dolanmaları nedeniyle tutulma merkezinin E noktasına çok yakın gerçekleşeceği söylenebilir.

Yıldızların kendi eksenleri etrafındaki dönme yönleri, genellikle dolanma yönleri ile aynı doğrultuda ve dönme eksenleri ise bu doğrultuya dik bir durumdadır. Bu durumda tutulmalar sırasında tayfsal çizgilerin değişimi maksimum düzeyde olacaktır. Şayet  $i \neq 90^\circ$  olan bir yörünge söz konusu ise bu durumda yıldızların dönmeleri sonucu çizgilerin etkilenmesi  $V \cdot \sin i$  ile orantılı olarak değişir.

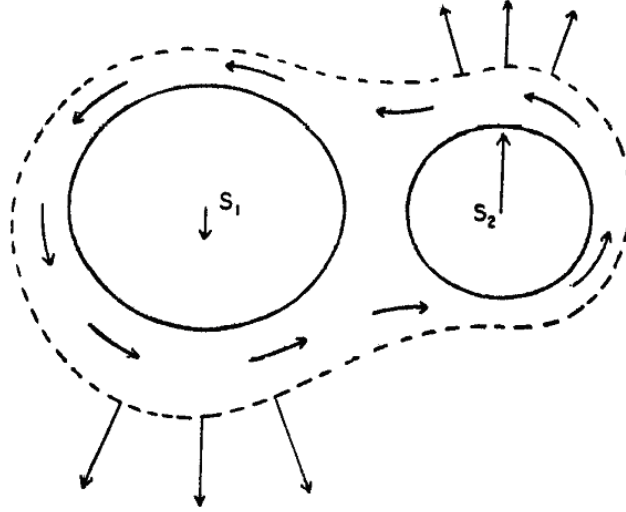
Birinci minimum gerçekleşmeden hemen önce parlak bileşenin bizden uzaklaşan kısmı gözleneceğinden bu evrede dikine hızda pozitif yönde bir artma gerçekleşir. Tam tutulmanın meydana gelmesi durumunda minimumun ortasında başyıldız tamamen örtüleceğinden, dikine hız eğrisinde dönme nedeniyle herhangi bir etki bulunmaz. Tutulmadan hemen sonra ise parlak bileşenin bize yaklaşan kısmı gözleneceğinden, dikine hızda negatif yönde bir artma ortaya çıkar. Gözlemsel çalışmalar bu sonucu desteklemektedir.

### Gaz Akıntıları

O. Struve aynı zamanda örten değişen olan tayfsal bir çift yıldızın incelemesinde, önce ışık eğrisinden yörünge parametrelerini ve ardından bu parametreleri kullanarak teorik dikine hız eğrisinin nasıl olması gerektiğini hesaplamıştır. Yaptığı inceleme sonucunda hesaplanan ve gözlenen dikine hızlar arasındaki büyük farklılığın birinci minimumdan önceki zamanlarda gerçekleştiğini görmüştür (Şekil 5.32). Bu farklılık, çift yıldızın etrafında bulunan gaz akıntıları ile açıklanabilmektedir. Bu tür etkilerin gözlenebildiği bütün çift yıldızlarda bileşen yıldızlar birbirine çok yakındır ve bu nedenle de bileşen yıldızlar arasında çekimsel dalgalar ya da başka daha şiddetli etkileşimler meydana gelir.



Şekil 5.32. Gaz akıntısı ve dönmenin dikine hız eğrisine etkisi



Şekil 5.33. Yakın çift yıldız sisteminde gaz akıntıları.

Şekil 5.33’de bu tür bir gaz akıntısının yapısı gösterilmiştir. Burada  $S_1$  parlak olan bileşeni ve aynı zamanda büyük kütleli bileşeni, dolayısıyla da dikine hız eğrisinin gözlemlendiği yıldız göstermektedir.  $S_2$  yıldızının kütle merkezine göre hızı,  $S_1$  yıldızına göre daha büyük olacak ve her iki bileşen aynı  $P$  dolanma dönemine sahip olacaktır.  $S_2$  yıldızının baş yıldız örtmeye başlamadan hemen önce  $S_1$  yıldızının görünen diski üzerine iz düşürülmüş bir gaz akıntısı görülmeye başlar. Bu gaz akıntısının dikine hızı uzaklaşma yönünde olacağından  $S_1$  yıldızının dikine hızına olan katkısından daha büyük bir dikine hızın gözlenmesine neden olur. Tutulmadan hemen sonra ise  $S_1$  yıldızının önünde yaklaşan gaz akıntısı gözleneceğinden, negatif yönde bir artma meydana gelecektir.

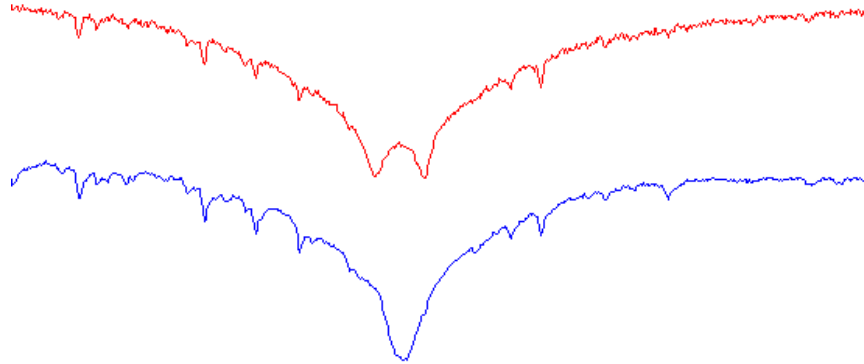
Eğer soğurma çizgileri  $S_1$  yıldızının tersinir tabakasında üretiliyor ve gaz tarafından bu soğurma çizgileri etkileniyor (blend) ise bu durumda baş bileşenin dikine hız değerlerinde değişim gerçekleşir. Gaz

akıntılarının bulunması, dikine hız değerlerinde örtülmeden önce pozitif yönde, örtülmeden sonra ise negatif yönde bir artmaya neden olur. Yıldızın her iki tarafındaki gaz maddesinin ürettiği soğurma çizgilerinin yapısı birbiri ile tamamen aynı olmayabilir, bu nedenle de dikine hız eğrisi üzerindeki bozulmalar birbirinden farklı şiddette gerçekleşebilir. Bu bozucu etkiler nedeniyle ilk yörünge analizlerinde doğru olmayan yörünge elemanları elde edildikten sonra, bu parametreler üzerinde düzeltmeler yapılarak sisteme ilişkin gerçek parametreler hesaplanır.

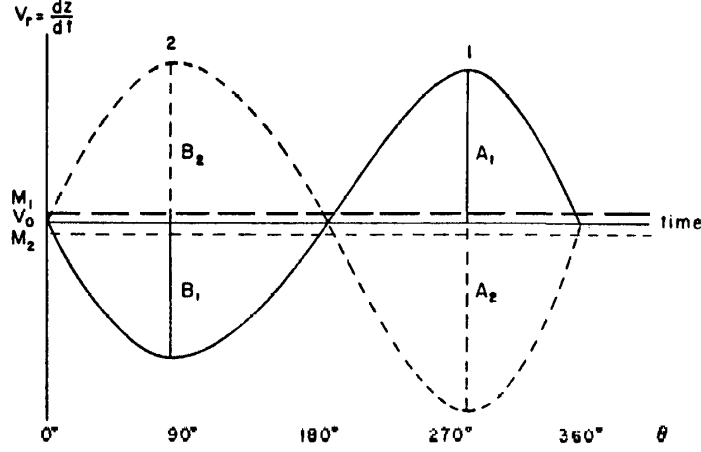
### Her İki Tayfın Gözlenebilmesi Durumu

Bileşen yıldızların parlaklıkları birbirlerine yakın olması durumunda, alınan tayflarda her iki bileşene ait soğurma çizgilerinin dönemli olarak birbirine zıt yönde değiştiği gözlenir. Böyle tayfsal çift yıldızların dikine hız eğrileri iki tane olacaktır ve  $V_0$  ekseninde bu iki dikine hız eğrisi birbirini kesecektir. Bu durum kütle merkezine göre iki bileşen yıldızın ayrı ayrı mutlak yörünge elipslerine benzer bir durumdur. Böylesi dikine hız eğrilerinde bir tane  $V_0$  eksenini, fakat iki adet  $M$  medyan eksenini bulunur.  $V_0$ ,  $i$  ve  $e$  değerleri her iki bileşen yıldız için de aynı değere sahiptir. Ayrıca  $v$  gerçel anomali açıları aynı olacak, fakat  $\omega$  açıları birbirinden  $180^\circ$  farklı olacaktır.

Herhangi bir zaman için dikine hız değerleri,  $V_0$  eksenine göre aynı orantısal büyüklüğe sahip olacaktır. Her iki dikine hız eğrisi de  $V_0$  eksenine göre benzer özelliklere sahiptir. Bunun nedeni ise her iki bileşenin mutlak yörüngelerinin kütle merkezine göre benzer yapıya sahip olmasıdır. Her iki dikine hız eğrisinin gözlenebildiği durumlarda  $V_0$  eksenine yakın konumlarda soğurma çizgileri üst üste biner ve bu nedenle *blending* etkisi ortaya çıkar. Böylesi tayflarda soğurma çizgileri daha genişlemiş durumdadır.



**Şekil 5.34.** Zaman zaman çift, zaman zaman ise aynı soğurma veya salma çizgisi tek olarak görülür.



**Şekil 5.35.** Her iki bileşene ait tayfın görülebildiği çift yıldızda ait dikine hız eğrisi.

1 indisi daha güçlü ve daha kolay ayırt edilebilen soğurma çizgisine sahip olan parlak baş yıldız için kullanılır.

$$V_{r1} = K_1 \{e \cos \omega + \cos(\nu + \omega)\}$$

$$V_{r2} = K_2 \{e \cos(\omega + 180) + \cos(\nu + \omega + 180)\}$$

$$= -K_2 \{e \cos \omega + \cos(\nu + \omega)\}$$

$$\frac{V_{r1}}{V_{r2}} = -\frac{K_1}{K_2}$$

yazabiliriz.

Her iki dikine hız eğrisini kullanarak daha önce gördüğümüz yöntemler ile yörünge parametrelerini belirlemek mümkündür. Fakat burada dikine hız eğrilerinin birbirlerine göre değişimini ki bunlar görelî yörünge elipsine karşılık gelecektir, inceleyebiliriz. Bu durumda doğrudan iki soğurma çizgisinin birbirlerine göre görelî konumlarının belirlenmesi yeterli olacak ve ayrıca bir mukayese tayfına gerek kalmayacaktır.

$$V_{görelî} = V_{r1} - V_{r2} = K_{görelî} \{e \cos \omega + \cos(\nu + \omega)\}$$

$$K_{görelî} = K_1 + K_2 = \frac{n(a_1 + a_2) \sin i}{\sqrt{(1 - e^2)}} = \frac{na \sin i}{\sqrt{(1 - e^2)}}$$

yazabiliriz. Buradan görelî yörüngeye ilişkin yarı-büyük eksen uzunluğunu hesaplayabiliriz.

$$a \sin i = \frac{(K_1 + K_2)}{n} \sqrt{(1 - e^2)} = (K_1 + K_2) \frac{P}{2\pi} \sqrt{(1 - e^2)}$$

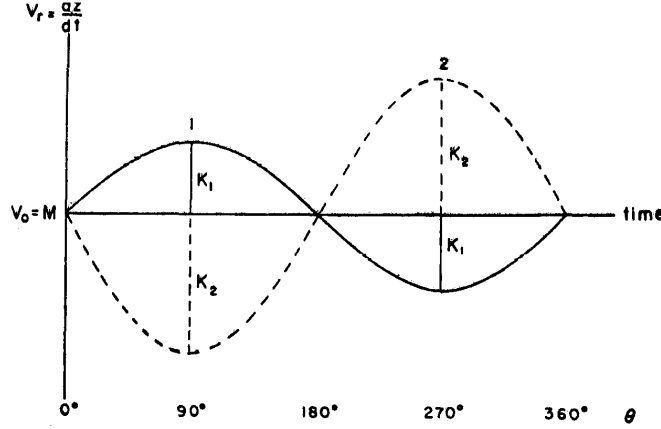
Eğer  $a$  değerini kilometre ve  $P$  değerini gün biriminde alırsak,

$$a \sin i = 13751(K_1 + K_2)P\sqrt{(1-e^2)}$$

yazabiliriz.  $a$  değerini milyon km ve  $P$  yine gün biriminde alınırsa, bu durumda;

$$a \sin i = 0.01375(K_1 + K_2)P\sqrt{(1-e^2)}$$

olacaktır.



Şekil 5.36. Tipik bir W UMa türü çift yıldızın dikine hız eğrisi.

### Çift Çizgili Tayfsal Çift Yıldızlarda Kütle Oranı

Bu tür çift yıldızlarda kütle oranı karşılıklı genliklerin birbirlerine oranı olarak hesaplanır.

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{A_1 + B_1}{A_2 + B_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

yazabiliriz. Buradan ekstremum noktaları için,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{K_1(1+e \cos \omega)}{K_2(1+e \cos \omega)} = \frac{K_1}{K_2}$$

Kural olarak daha parlak olan bileşenin daha büyük kütle ve bu nedenle daha küçük genliğe sahip olduğu kabul edilir. Burada  $K_1$  ve  $K_2$  değerlerinin her ikisi de pozitif olarak alınır.

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = \frac{K_1}{K_2}$$

Eğer  $a$  değerini astronomi birimlerinde ve  $P$  değerini yıl biriminde alırsak,

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{a^3}{P^2}, \quad (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \sin^3 i = \frac{(a \sin i)^3}{P^2}$$

yazabiliriz. Denge koşulu ve orantının özelliğinden yararlanarak,

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{a_2}{a} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = \frac{a_2}{a} \frac{a^3}{P^2} = \frac{a_2 a^2}{P^2}$$

elde edilir. Yine  $a$  yarı-büyük eksen uzunluğu için milyon km ve  $P$  için gün birimleri kullanılırsa,

$$(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \sin^3 i = \frac{(a \sin i)^3}{25P^2}$$

yazabiliriz.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \sin^3 i &= \frac{(a_2 \sin i)(a \sin i)^2}{25P^2} \\ \mathfrak{M}_2 \sin^3 i &= \frac{(a_1 \sin i)(a \sin i)^2}{25P^2} \end{aligned} \right\}$$

Bu tür bir işlem sonucunda sisteme ilişkin kütle oranları ve bileşen yıldızların tek tek kütleleri veya toplam kütleyle  $\sin^3 i$ 'li ifade ile birlikte bulabilmekteyiz. Eğer incelenen çift yıldız aynı zamanda örten değişen bir sistem ise bu durumda  $i$  yörünge eğim açısını ışık eğrisi analizinden elde edilebildiğinden sisteme ilişkin toplam kütle ve bileşenlerin ayrı ayrı kütlelerini hesaplamak mümkündür.

### Yansıma Etkisi

Her iki tayfın görülebildiği bileşenlerin ışınım güçlerinin karşılaştırılabilir boyutlarda olduğu sistemlerde, kütlelerin belirlenebilmesi için yansıma etkisinin dikkate alınması gerekir. Bu etki bileşen yıldızların birbirlerine bakan yüzeylerinin arka kısımlarına göre biraz daha parlak olması durumunda gerçekleşen bir olaydır. Her iki diske ait ışık merkezi tam olarak kütle merkezleri doğrultusunda olmayabilir, fakat çekim merkezi doğrultusunda bulunur. Ölçülen genlikler, etkin olan daha küçük bir yörüngeye ait olacaktır. Bir başka deyişle  $a$  veya  $asini$  ifadelerine birden büyük bir düzeltmenin yapılması gerekir. Bu etkinin boyutları Kuiper tarafından bileşenlerin görelî boyutları ve tayf türlerine göre tablolar halinde verilmiştir.

$a$  veya  $asini$  için bu düzeltmenin yapılması büyük öneme sahiptir fakat formülde görülen  $MSin^3i$  ifadesindeki gibi bu etki küp şeklinde işlemlere girmez. Bu etki hesaplanan kütlelerin değişmesine neden olan bir etkidir. Eğer bileşen yıldızların sıcaklıkları yeterince birbirinden farklı ise bu durumda her iki yıldız için uygulanacak düzeltmeler farklı olacak ve kütle oranlarının değişmesine neden olacaktır. Pratikte kütle oranları çok az değişim gösterir. Bunun nedeni ise her iki bileşenin çizgilerinin tayfta gözlenebilmesi nedeniyle bileşen yıldızların birbirlerine yakın sıcaklıklara sahip olmalarıdır.

Tek çizgili tayfsal çift yıldızlarda bileşenler arasındaki parlaklık farkı büyüktür. Sönük olan bileşen, parlak olan bileşen üzerinde ölçülebilir bir yansıma etkisine neden olmaz. Bu nedenle tek bileşeni gözlenebilen dikine hız eğrilerinde bu etki ihmal edilir.



### Tayfsal Çift Yıldızlar için Kütle Bağıntısı

$$a_{1,2} \sin i (R_{\odot}) = 1.9758 \times 10^{-2} P K_{1,2} (1-e^2)^{1/2} \quad (a \sin i = a_1 \sin i + a_2 \sin i)$$

$$M_{1,2} \sin^3 i (M_{\odot}) = 1.036 \times 10^{-7} (K_1 + K_2)^2 K_{2,1} P (1-e^2)^{1/2}$$

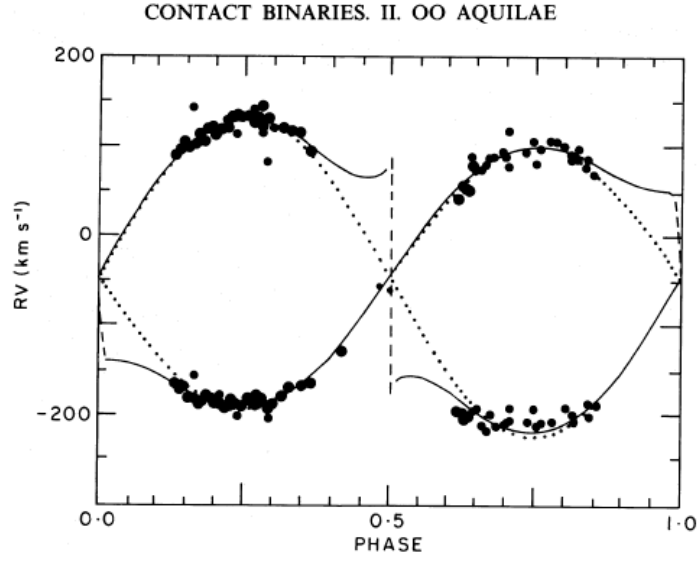
$$M_2/M_1 = a_1 \sin i / a_2 \sin i = K_2/K_1 \quad (\text{SB2'ler için})$$

$$f(M)(M_{\odot}) = (M_2 \sin i)^3 / (M_1 + M_2)^2 \quad (\text{SB1'ler için})$$

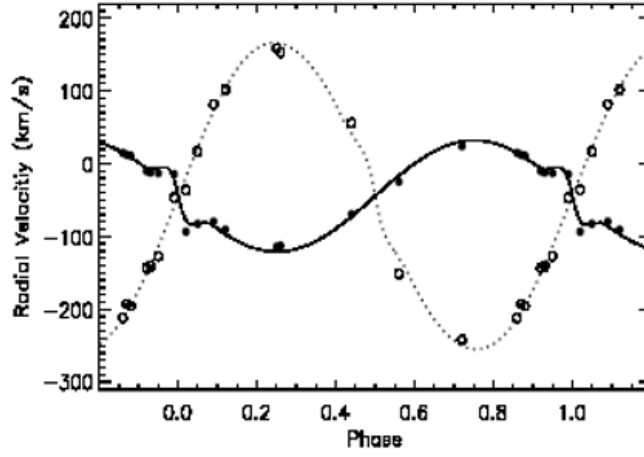
$$= 1.036 \times 10^{-7} (K_1)^3 P$$

$$= M_1 q^3 \sin^3 i / (1+q)^2$$

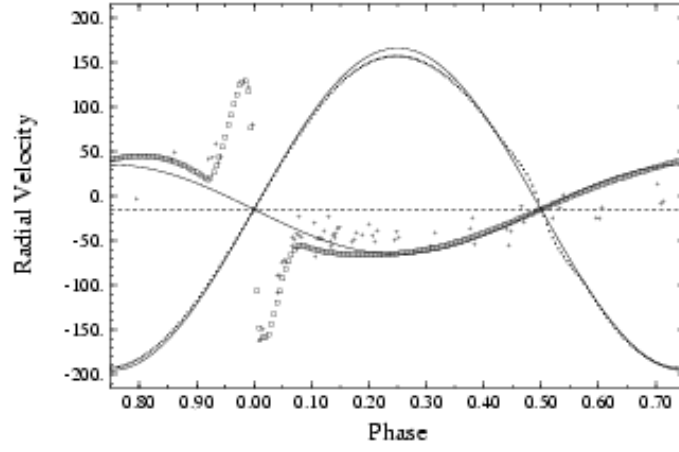
## Örnek Dikine Hız Eğrileri



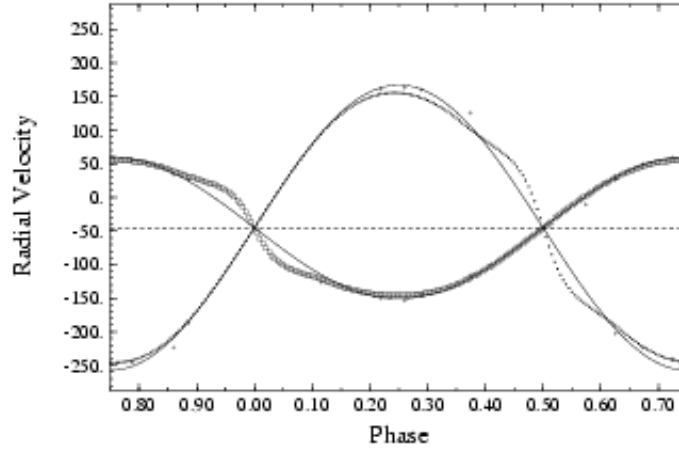
Şekil 5.37. OO Aql sisteminin dikine hız eğrisi. Yakınlık etkisi açık bir şekilde görülebilmektedir.



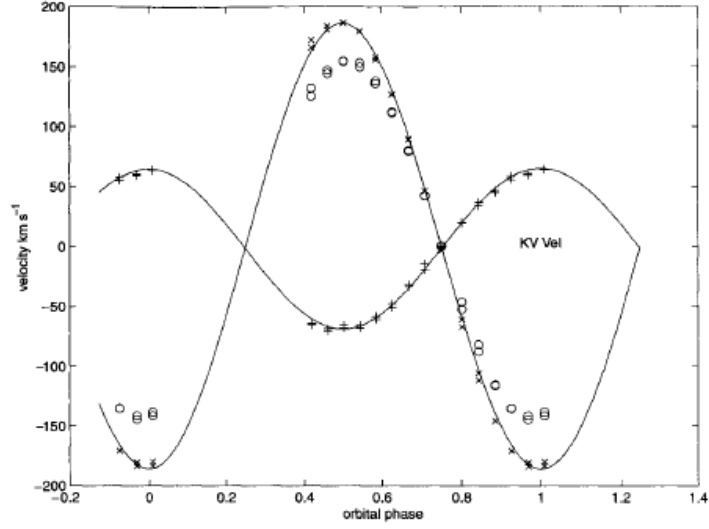
Şekil 5.38. RZ Cas sisteminin dikine hız eğrisi. İçi dolu noktalar baş bileşene, boş olan noktalar ise yoldaş bileşene ait gözlemlerdir. Teorik eğriler ise sürekli ve kesikli çizgiler ile gösterilmiştir.



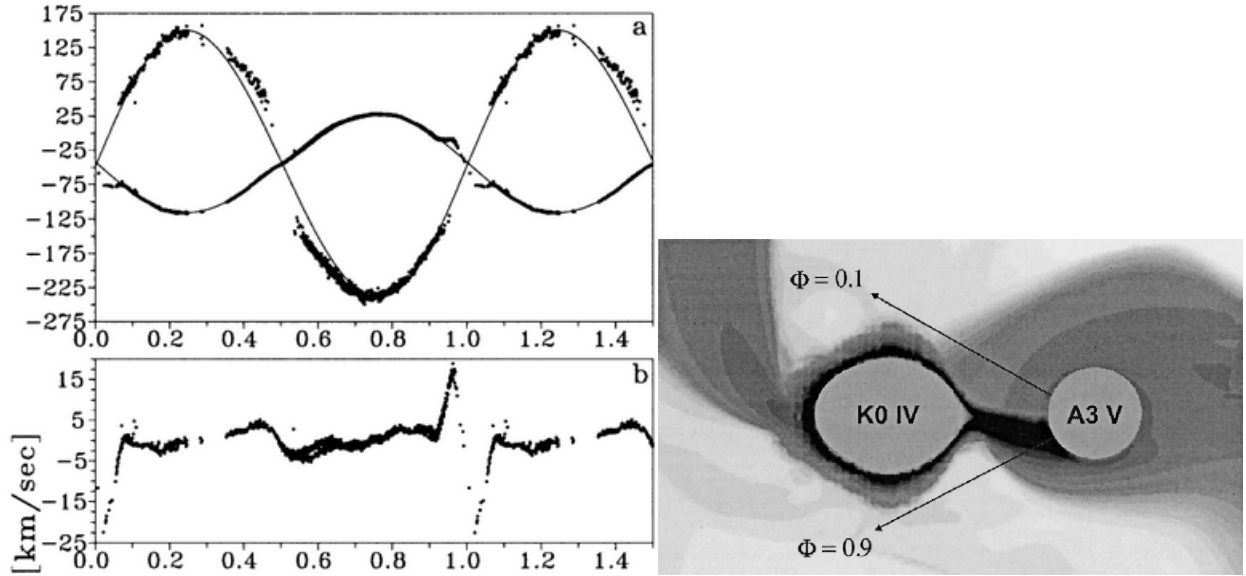
Şekil 5.39. RZ Sct Sisteminin Dikine Hız Eğrisi



Şekil 5.40. BX And sisteminin dikine hız eğrisi



**Şekil 5.41.** Tutulma göstermeyen KV Vel sisteminde her iki bileşenin dikine hız değişimi. + sembolü baş bileşeni, o sembolü ise yoldaş bileşenin gözlemini göstermektedir. x işaretleri yansıma etkisinin düzeltilmiş olduğu verileri göstermektedir ve bu sistem bu konuda extrem bir örnektir (Hilditch et al. 1996)



**Şekil 5.42.** RZ Cas sisteminin dikine hız eğrisi (Ref. A&A 413, 293-299 (2004))