Varlık-Teklik Teoremleri

Bu bölümde ilk kesimde skaler diferensiyel denklemler için varlık-teklik teoremleri ifade edilecektir. İkinci kesimde ise, diferensiyel denklem sistemleri için varlık-teklik teoremleri ifade edilecektir.

Skaler Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlık ve Tekliği

Birinci basamaktan skaler

$$u' = g(t,u) \tag{1}$$

diferensiyel denklemini ve

$$u(t_0) = u_0 \tag{2}$$

başlangıç koşulunu ele alalım, burada g, $I \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon, $I \subset \mathbb{R}$ açık bir alt aralıktır.

Tanım 1. I üzerinde tanımlı olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\phi(t)$ fonksiyonuna (1)-(2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir:
- (i) $t \in I$ için $\phi'(t)$ mevcuttur,
- (ii) $\phi(t_0) = u_0, t_0 \in I$,
- (iii) $t \in I$ için $(t, \phi(t)) \in I \times \mathbb{R}$,
- (iv) $t \in I$ için $\phi'(t) = g(t, \phi(t))$.

Teorem 1. $g(t,u)$ ve $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ fonksiyonları $R(a,b) = \{(t,u) : |t - t_0| \leq a, \;\; |u - u_0| \leq b\}$ bölgesinde t ve u ya göre sürekli ise, bu durumda (1)-(2) başlangıç değer probleminin $|t - t_0| \leq h$ aralığında tanımlı bir tek $u(t)$ çözümü vardır, burada $|g(t,u)| \leq M$ olmak üzere $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$ dir.

Tanım 2. Her $(t, u_1), \; (t, u_2) \in R(a,b)$ için

$$|g(t,u_1) - g(t,u_2)| \leq K\,|u_1 - u_2| \tag{3}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir K sabiti mevcutsa, g fonksiyonuna $R(a,b)$ bölgesinde bir Lipschitz koşulunu sağlıyor denir, K sabitine de Lipschitz sabiti denir.

Uyarı 1. $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ türevi $R(a,b)$ bölgesinde sürekli ise, bu durumda g fonksiyonu $R(a,b)$ de Lipschitz koşulunu sağlar.Ancak tersi doğru değildir. Örneğin, $g(t,u) = t\,|u|$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasını içeren bir bölgede Lipschitz koşulunu sağladığı halde, u-ya göre kısmi türevi $u = 0$ için mevcut değildir.

Teorem 2. $g(t,u)$ fonksiyonu bir kapalı ve sınırlı $R(a,b)$ bölgesinde t ve u ya göre sürekli ve bir Lipschitz koşulunu sağlıyor ise, bu durumda (1)-(2) başlangıç değer probleminin $|t-t_0| \leq h$ aralığında tanımlı bir tek $u(t)$ çözümü vardır, burada $|g(t,u)| \leq M$ olmak üzere $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$ dir.

Uyarı 2. Lipschitz koşulu bir yeter koşuldur ancak gerekli değildir. Örneğin, $u(t) \equiv 0$ fonksiyonu reel değerli skaler $u' = -tu^{\frac{1}{3}}$ diferensiyel denkleminin $(0,0)$ noktasından geçen tek çözümüdür. Ancak, $g(t,u) = -tu^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonu $u = 0$ olan hiçbir yerde Lipschitz koşulunu sağlamaz.

Diferensiyel Denklem Sistemleri İçin Varlık-Teklik Teoremleri

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i(t_0) = x_{i0},\ i = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Bu sistem vektör notasyonu cinsinden

$$X' = f(t,X),\ X(t_0) = X_0, \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir, burada $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T,\ f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ ve $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})^T$ $\mathbb{R}^n$ de vektörlerdir. $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n),\ \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ açık bir bölgedir.

Tanım 3. J aralığı üzerinde tanımlı olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))^T$ fonksiyonuna (5) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir:

(i) $t \in J$ için $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), ...\varphi_n'(t))^T$ mevcuttur,
(ii) $\varphi(t_0) = X_0, t_0 \in J$,
(iii) $t \in J$ için $(t, \varphi(t)) \in \Omega$,
(iv) $t \in J$ için $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$.

Tanım 4. Her $(t,X),\ (t,Y) \in \Omega$ için

$$|f(t,X) - f(t,Y)| \leq L \left\| X - Y \right\| \tag{6}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir L sabiti mevcutsa, f fonksiyonuna Ω bölgesinde bir Lipschitz koşulunu sağlıyor denir, L sabitine de Lipschitz sabiti denir.

Teorem 3. $f(t,X)$ vektör değerli fonksiyonu
$B = \{(t,X) : |t-t_0| \leq a,\ \ \|X - X_0\| \leq b,\ a, b$ pozitif reel sabitler$\}$ üzerinde sürekli olsun ve (6) Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda (5) başlangıç değer probleminin $|t-t_0| \leq h$ üzerinde tanımlı olan bir tek $X(t)$ çözümü vardır, burada $h = \min(a, \dfrac{b}{M}),\ M = \underset{(t,X) \in B}{maks} \left\| f(t,X) \right\|$.

Ardışık Yaklaşıklıklar Yöntemi

$$u' = g(t,u),\ u(t_0) = u_0, \tag{7}$$

başlangıç değer problemini ele alalım, burada $g(t,u)$ fonksiyonu bir açık irtibatlı $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bölgesinde tanımlı ve sürekli olup $(t_0, u_0) \in D$.

(7) başlangıç değer probleminin bir çözümünü bulmak için ardışık yaklaşıklıklar yöntemi uygulanabilir. Bu yöntem (7) başlangıç değer problemini

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, u(s))ds \tag{8}$$

integral denklemine indirgedikten sonra çalışır. Bu yönteme göre ilk olarak bir yaklaşık çözüm seçilir ve daha sonra bu çözüm iterasyonla geliştirilir. Bu iterasyonların limit durumunda (7) probleminin bir çözümüne yakınsayacağı beklenebilir.

İlk yaklaşık çözüm olarak genellikle $u_0(t) = u_0$ sabit fonksiyonu alınır. Buna dayanarak

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, u_0(s))ds$$

şeklinde yeni ve daha iyi bir yaklaşık çözüm bulunur. Bu işleme devam edilirse,

$$u_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, u_1(s))ds$$

biçiminde $u_1(t)$ den daha iyi olan $u_2(t)$ yaklaşık çözümü bulunur. Genel olarak

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, u_{n-1}(s))ds$$

elde edilir. $g(t,u)$ fonksiyonu
$B = \{(t,u) : |t - t_0| \leq a,\ \ \|u - u_0\| \leq b,\ a, b \text{ pozitif reel sabitler}\}$ bölgesinde sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu durumda (u_n) dizisi (7) nin bir tek u çözümüne $|t - t_0| \leq h$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır, burada $h = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \underset{(t,u)\in B}{maks} \|g(t,u)\|$.

Örnek 1.

$$u' = -u, \; u(0) = 1, \; t \geq 0,$$

başlangıç değer problemi

$$u(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

integral denklemine eşdeğerdir. İlk yaklaşık çözüm $u_0(t) \equiv 1$ olsun. İkinci yaklaşık çözüm

$$u_1(t) = 1 - \int_{0}^{t} u_0(s)ds = 1 - t$$

dir. İkinci yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1 - \int_{0}^{t} u_1(s)ds \\ &= 1 - (t - \frac{t^2}{2}). \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$u_n(t) = 1 - \left[t - \frac{t^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right]$$

olarak bulunur. Buradan verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(t) = \lim_{n \to \infty} u_n(t) = e^{-t}$$

elde edilir.