Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri ve Operatör Metodu

Bu bölümde lineer denklem sistemleri tanıtılıp operatör yöntemi ifade edilecektir.
İki bilinmeyenli iki tane diferensiyel denklemden meydana gelen sistem

$$\begin{cases} a_1(t)\dfrac{dx}{dt} + a_2(t)\dfrac{dy}{dt} + a_3(t)x + a_4(t)y = F_1(t) \\ \\ b_1(t)\dfrac{dx}{dt} + b_2(t)\dfrac{dy}{dt} + b_3(t)x + b_4(t)y = F_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

şeklindedir. (1) denklem sisteminin özel durumu olan

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + F_1(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + F_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

sistemine *normal form* denir.

n tane $x_1, x_2, ..., x_n$ fonksiyonu ve n denklemden meydana gelen lineer sistemin normal formu

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + F_1(t) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + F_2(t) \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + F_n(t) \end{cases} \tag{3}$$

dir. $n-$yinci basamaktan bir lineer skaler diferensiyel denklemin daima (3) formunda bir diferensiyel denklem sistemine indirgenebilmesi, bu tür sistemlerin sahip olduğu önemli bir özelliktir. Özel olarak

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = F(t) \tag{4}$$

denklemini ele alalım.

$$x_1 = x,\ x_2 = \frac{dx}{dt},\ x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}, ..., x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

olsun. Bu durumda (4) denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \cdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - ... - a_1(t)x_n + F(t) \end{cases}$$

sistemine indirgenir ki bu sistemin normal formlu (3) sisteminin özel hali olduğu açıktır.

Operatör Metodu

Bu kesimde sabit katsayılı lineer denklem sistemlerinin genel çözümünü bulmak için kullanılabilen operatör metodu açıklanacaktır.

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= f_1(t) \\ L_3x + L_4y &= f_2(t) \end{aligned} \tag{5}$$

lineer diferensiyel denklem sistemini ele alalım, burada L_1, L_2, L_3 ve L_4 aşağıdaki biçimde verilen lineer diferensiyel operatörlerdir:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv a_0D^m + a_1D^{m-1} + ... + a_{m-1}D + a_m, \\ L_2 &\equiv b_0D^n + b_1D^{n-1} + ... + b_{n-1}D + b_n, \\ L_3 &\equiv \alpha_0D^p + \alpha_1D^{p-1} + ... + \alpha_{p-1}D + \alpha_p, \\ L_4 &\equiv \beta_0D^q + \beta_1D^{q-1} + ... + \beta_{q-1}D + \beta_q, \end{aligned}$$

burada a_i $(i = 1, 2, ..., m)$, b_i $(i = 1, 2, ..., n)$, α_i $(i = 1, 2, ..., p)$, ve β_i $(i = 1, 2, ..., q)$ sabitleri reeldir.

Adım 1. (5) sisteminde ilk denkleme L_4, ikinci denkleme L_2 operatörleri uygulanıp taraf tarafa çıkarılırsa, $L_4L_2y = L_2L_4y$ olduğundan

$$(L_4L_1 - L_2L_3)\, x = L_4f_1 - L_2f_2 \tag{6}$$

bulunur. $L_4L_1 - L_2L_3$ ifadesi sabit katsayılı lineer bir diferensiyel operatördür. Bu ifadenin sabit olmadığını kabul ederek L_5 ile gösterelim. Ayrıca $L_4f_1 - L_2f_2$ mevcut olsun. bu durumda (6) denklemi

$$L_5x = g_1(t) \tag{7}$$

şeklinde yazılabilir, burada $g_1(t) = L_4 f_1(t) - L_2 f_2(t)$ dir. Artık (7) denklemi sadece x bağımlı değişkenine bağlı, sabit katsayılı bir lineer diferensiyel denklemdir. L_5 operatörünün basamağının N olduğunu kabul edersek, (7) denklemin genel çözümü

$$x = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_N u_N + U_1 \tag{8}$$

formunda olur, burada $u_1, u_2, ..., u_n$ fonksiyonları $L_5 x = 0$ homogen denkleminin lineer bağımsız çözümleri, $c_1, c_2, ..., c_N$ ler keyfi sabitler ve U_1 de (7) denkleminin bir özel çözümüdür.

Adım 2. (5) sisteminde ilk denkleme L_3, ikinci denkleme L_1 operatörleri uygulanıp taraf tarafa çıkarılırsa, $L_3 L_1 x = L_1 L_3 x$ olduğundan

$$(L_4 L_1 - L_2 L_3)\, y = L_1 f_2 - L_3 f_1 \tag{9}$$

bulunur. $L_1 f_2 - L_3 f_1$ nin mevcut olduğu kabul edilirse, bu kez sadece y bağımlı değişkenine bağlı, sabit katsayılı lineer

$$L_5 x = g_2(t) \tag{10}$$

diferensiyel denklemi elde edilir, burada $g_2(t) = L_1 f_2(t) - L_3 f_1(t)$ dir. (10) denklemin genel çözümü

$$y = k_1 u_1 + k_2 u_2 + ... + k_N u_N + U_2 \tag{11}$$

formunda olur, burada $u_1, u_2, ..., u_n$ fonksiyonları $L_5 y = 0$ homogen denkleminin lineer bağımsız çözümleri, $k_1, k_2, ..., k_N$ ler keyfi sabitler ve U_2 de (7) denkleminin bir özel çözümüdür.

Adım 3. Dikkat edilmelidir ki (8) ve (11) ile verilen (x, y) çözüm çifti $2N$ tane keyfi sabite bağlıdır. Ancak (5) lineer denklem sisteminin genel çözümü $L_4 L_1 - L_2 L_3$ operatörünün basamağı kadar yani N tane keyfi sabit içermelidir. Bu durumda keyfi sabitlerden N tanesi diğer N tanesine bağlıdır. (8) ve (11) ile ifade edilen fonksiyonlar (5) sistemindeki denklemlerde yerlerine yazılıp düzenlenerek keyfi sabitler arasındaki bağıntılar bulunur. Bulunan bağıntılar (8) ve/veya (11) de yerlerine yazılarak (5) sisteminin çözümü ifade edilmiş olur.

Örnek.

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} - 3x = t \\[2ex] 2\dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3x + 8y = 2 \end{cases} \tag{12}$$

diferensiyel denklem sistemini çözünüz.

Çözüm. (12) sistemi operatör notasyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} (2D-3)x - 2Dy &= t \\ (2D+3)x + (2D+8)y &= 2 \end{aligned} \tag{13}$$

şeklinde yazılır. (13) sistemindeki ilk denkleme $(2D+8)$ ikinci denkleme $2D$ operatörleri uygulanıp elde edilen denklemler toplanırsa,

$$(D^2+2D-3)x = t + \frac{1}{4} \tag{14}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (14) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$x = c_1e^t + c_2e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36} \tag{15}$$

dır. Şimdi (13) sistemindeki ilk denkleme $(2D+3)$ ikinci denkleme $(2D-3)$ operatörleri uygulanıp elde edilen denklemler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(D^2+2D-3)y = -\frac{3}{8}t - 1 \tag{16}$$

diferensiyel denklemi bulunur. (16) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = k_1e^t + k_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \tag{17}$$

dir. Diğer taraftan $(L_1L_4 - L_2L_3)$ operatörünün basamağı 2 dir. Yani (12) sisteminin genel çözümü 2 keyfi sabite bağlıdır. c_1, c_2, k_1 ve k_2 sabitleri arasındaki bağıntıyı bulmak için (15) ve (17) (13) sistemindeki ilk denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$k_1 = -\frac{1}{2}c_1, \;\; k_2 = \frac{3}{2}c_2$$

elde edilir. O halde (13) sisteminin genel çözümü

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= -2k_1e^t + \frac{2}{3}k_2e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36} \\ y(t) &= k_1e^t + k_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \end{aligned} \right.$$

olarak bulunur.