Homogen Olmayan Lineer Denklem Sistemleri (Parametrelerin Değişimi Yöntemi)

Bu bölümde homogen olmayan lineer sistemlerin bir özel çözümünün bulunmasına ilişkin bir yöntem üzerinde durulacaktır. Parametrelerin değişimi yöntemi homogen olmayan lineer sisteme ilişkin homogen sistemin genel çözümü bilinmek kaydıyla sadece sabit katsayılı homogen olmayan sistemlerin değil aynı zamanda değişken katsayılı homogen olmayan lineer sistemlerin özel çözümünün bulunmasında da kullanılan bir yöntemdir.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{aligned} \right. \tag{1}$$

homogen olmayan lineer sistemi ile bu sisteme ilişkin homogen

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y \\ \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y \end{aligned} \right. \tag{2}$$

sistemini ele alalım. (2) homogen sisteminin genel çözümü

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{array} \right. \tag{3}$$

şeklindedir. Buna göre $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ fonksiyonları

$$\begin{array}{c} c_1'(t)x_1 + c_2'(t)x_2 = f_1(t) \\ c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = f_2(t) \end{array}$$

sistemini sağlamak üzere (1) homogen olmayan sistemin bir özel çözümü

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \\ y = y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \end{array} \right. \tag{4}$$

şeklindedir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - 5t + 2 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y - 8t - 8 \end{cases} \tag{5}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (5) sistemine ilişkin homogen sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y_h(t) = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

dir. Buna göre verilen sistemin bir özel çözümü

$$\begin{cases} x_p(t) = c_1(t) e^{-3t} + c_2(t) e^{2t} \\ y_p(t) = -4c_1(t) e^{-3t} + c_2(t) e^{2t} \end{cases} \tag{6}$$

formundadır, burada $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ aşağıdaki sistemi sağlayan fonksiyonlardır.

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^{-3t} + c_2'(t)e^{2t} &= -5t + 2 \\ -4c_1'(t)e^{-3t} + c_2'(t)e^{2t} &= -8t - 8 \end{aligned} \tag{7}$$

(7) sisteminden $c_1'(t)$ ve $c_2'(t)$ çözülüp integralleri hesaplanarak

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{5} t e^{3t} + \frac{3}{5} e^{3t}, \\ c_2(t) &= \frac{14}{5} t e^{-2t} + \frac{7}{5} e^{-2t} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (6) dan verilen sistemin bir özel çözümü

$$\begin{cases} x = x_p(t) = 3t + 2 \\ y = y_p(t) = 2t - 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buna göre (5) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + 3t + 2 \\ y(t) = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + 2t - 1 \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.