Özdeğer ve Özvektörler

A $n \times n$ türünde reel değerli sabit bir matris olsun ve S bütün $n \times 1$ türünde sabit kolon vektörlerini göstersin. $x \in S$ bilinmeyen vektör olmak üzere

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

denklemini ele alalım, burada λ bir sayıdır. Açık olarak 0 vektörü bu denklemin her λ sayısı için bir çözümüdür. Bu bölümde λ sayısının bazı değerlerine karşılık gelen, (1) denklemini sağlayan ve sıfır olmayan $x \in S$ vektörleri üzerinde duracağız.

Tanım 1. (1) denklemi sıfır olmayan bir x vektörü için sağlanıyorsa, bu durumda λ ya A matrisinin bir özdeğeri, x vektörüne de A matrisinin bir karakteristik vektörü denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ve

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

olsun. Buna göre (1) denklemi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ ... \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. Bu iki eşit vektörün karşılıklı bileşenleri eşitlenip düzenlenirse,

$$\begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

bulunur. Aşikar olmayan bir çözüm aradığımızdan (2) nin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

olmalıdır. Bu determinant matris notasyonu yardımıyla

$$|A - \lambda I| = 0$$

şeklinde yazılabilir, burada I, $n \times n$ türünde birim matristir. Böylece (1) denkleminin belli bir λ değerine karşılık sıfır olmayan bir x vektör çözümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul λ nın $n-$yinci dereceden (2) polinom denklemini sağlamasıdır.

Tanım 2. $A = (a_{ij})$ $n \times n$ türünde bir reel matris olsun. (3) denklemine A nın karakteritik denklemi denir. A matrisinin özdeğerleri (3) denkleminin kökleridir.

Örnek 1.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & 12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm. A matrisinin karakteristik denklemi

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 6 \\ -10 & 4-\lambda & 12 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

dır. Bu determinant hesaplanırsa,

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 31\lambda - 30 = 0$$

bulunur. Buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda = 2,\ \lambda = 3$ ve $\lambda = 5$ dir.

$\lambda = 2$ ye karşılık gelen özvektörler

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & 12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

denklemini sağlayan ve sıfır olmayan

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vektörleridir. Dolayısıyla, x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -10x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin aşikar olmayan bir çözümü olmalıdır. Bu cebirsel sistemin çözümü her $k \in \mathbb{R}$ için $x_1 = k,\ x_2 = -k,\ x_3 = -k$ dır. Böylece $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler

$$x = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R},$$

dir. Özel olarak, $k = 1$ için $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dir. Benzer işlemler yapılarak $\lambda = 3$ ve $\lambda = 5$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.