## $\mathbf{e}^{At}$ Matrisi

**Tanım 1.** Bir $A$ karesel matrisi için

$$e^{At} \equiv I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k \tag{1}$$

dır.
(1) deki sonsuz seri her $A$ ve $t$ için yakınsak olduğundan, $e^{At}$ bütün karesel matrisler için tanımlıdır.

**Teorem 1.** $A$, $n \times n$ türünde bir sabit matris ise, bu durumda

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \; x(0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = e^{At}x_0$$

dır.

**Sonuç 1.** $e^{At}$ matrisi sabit katsayılı $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ sistemi için bir temel matristir.

**Teorem 2.** $A$, $n \times n$ türünde bir sabit matris ise, bu durumda

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t), \; x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)ds \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds \end{aligned}$$

dir, burada $F(t)$ kolon vektör fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve $t_0 \in (a, b)$ dir.

**Teorem 3.** $A$, $n \times n$ türünde bir sabit matris ise, bu durumda

$$e^{At} = \alpha_{n-1}A^{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2}t^{n-2} + ... + \alpha_2A^2t^2 + \alpha_1At + \alpha_0I$$

dır, burada $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ her bir $A$ için belirlenmesi gereken $t$ nin fonksiyonlarıdır.

**Teorem 4.** $A$, $n \times n$ türünde bir sabit matris olmak üzere

$$r(\lambda) \equiv \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

olsun. $\lambda_i$, $At$ nin bir özdeğeri ise, bu durumda

$$e^{\lambda_i} = r(\lambda_i)$$

dir. Ayrıca $\lambda_i$, $m$ $(m > 1)$ katlı bir özdeğer ise, bu durumda aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_i} &= \left.\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} \\
e^{\lambda_i} &= \left.\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} \\
&\cdots \\
e^{\lambda_i} &= \left.\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} r(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i}
\end{aligned}$$

**Örnek 1.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

için $e^{At}$ matrisini hesaplayınız.

**Çözüm.** $A$ matrisinin özdeğerlerinin $|A - \lambda I| = 0$ denkleminin kökleri olduğunu biliyoruz. Yani

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

denklemi çözülerek $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 5$ bulunur. Bu durumda $At$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -t$ ve $\lambda_2 = 5t$ dir. Teorem 3 den

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \alpha_1 At + \alpha_0 I \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \alpha_0 & 2\alpha_1 t \\ 4\alpha_1 t & 3\alpha_1 t + \alpha_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

ve Teorem 4 den

$$r(\lambda) = \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

dır. O halde

$$e^{-t} = -\alpha_1 t + \alpha_0 \text{ ve } e^{5t} = 5\alpha_1 t + \alpha_0$$

denklemleri sağlanmalıdır. Bu iki denklem çözülerek

$$\alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{5t} - e^{-t}) \text{ ve } \alpha_0 = \frac{1}{6}(e^{5t} + 5e^{-t})$$

bulunur. Bu değerler (2) de yerlerine yazılırsa,

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2e^{5t} + 4e^{-t} & 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-t} & 4e^{5t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

bulunur.