Sylvester Metodu

$A,\ n \times n$ türünde bir matris olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

sisteminde A matrisinin bütün $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ özdeğerleri birbirinden farklı olduğu zaman e^{At} matrisi Sylvester tarafından

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} \tag{1}$$

şeklinde bulunmuştur, burada

$$Z_k \equiv \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)...(A-\lambda_n I)}{(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)...(\lambda_k-\lambda_n)} \equiv \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(A-\lambda_j I)}{\lambda_k-\lambda_j} \tag{2}$$

dir. Bu durumda

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ x(0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} Z_k e^{\lambda_k t} x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

dır.

Örnek 1.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. A matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

determinantı hesaplanarak,

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

olarak bulunur. Buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -2$ olup birbirinden farklıdır. O halde e^{At} matrisi Sylvester metodu yardımıyla hesaplanabilir.

O halde (2) den

$$Z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$Z_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur.(1) den

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=1}^{2} Z_k e^{\lambda_k t} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} e^{-2t} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3) den verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 \\ &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} e^{-2t} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dır.

Putzer Metodu

A, $n \times n$ türünde bir sabit matris olmak üzere e^{At} matrisinin hesabı için Putzer tarafından iki metot geliştirilmiştir. Burada ilk metot açıklanacaktır. İlk adımda

$$c(\lambda) = \det(A - \lambda I) \equiv \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$$

karakteristik polinomu ele alınarak

$$z^{(n)} + c_{n-1}z^{(n-1)} + ... + c_1 z' + c_0 z = 0,$$

$$z(0) = z'(0) = ... = z^{(n-2)}(0) = 0, \; z^{(n-1)}(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümü olan $z(t)$ skaler fonksiyonu hesaplanır. Daha sonra

$$q = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ ... \\ q_n(t) \end{pmatrix} = CZ$$

kolon vektörü inşa edilir, burada

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n-1} & 1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \\ ... \\ z^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

dir. Son adımda

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{j=0}^{n-1} q_{j+1}(t)A^j \\ &= q_1(t)I + q_2(t)A + q_3(t)A^2 + ... + q_n(t)A^{n-1} \end{aligned}$$

hesaplanır.