Lineer Olmayan Denklem Sistemleri ve İlk İntegraller

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n),\ i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

lineer olmayan denklem sistemini ele alalım. (1) sisteminin bir çözümü integre edilebilir kombinasyonları oluşturarak bulunabilir. İntegre edilebilir bir kombinasyon

$$\phi(t, x_1, x_2, ..., x_n) = c \tag{2}$$

şeklinde bir bağıntı elde etmeye imkan verir. Bu bağıntı bilinmeyen fonksiyonlarla bağımsız değişkeni birbirine bağlar ve (1) sisteminin bir *ilk integrali* adını alır. Böylece (1) sisteminin (2) şeklinde bir ilk integrali ϕ de bulunan x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ yerine (1) sisteminin $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ çözümü yazıldığında bir özdeşliğe dönen sonlu bir bağıntıdır.

Uyarı 1. $\phi(t, x_1, x_2, ..., x_n) = c$ şeklinde verilen bir ifadenin bir ilk integral olması için gerek ve yeter koşul bir D bölgesinde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

olmasıdır.

Gerçekten, (2) nin her iki yanının türevi alınırsa,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = 0$$

elde edilir. Son eşitlikte (1) sistemindeki her bir denklem göz önüne alınırsa,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} f_2 + ... + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} f_n = 0$$

şeklinde (3) bağıntısı elde edilir.

Uyarı 2. (1) sisteminin k tane ilk integrali

$$\begin{cases} \phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 \\ \phi_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) = c_2 \\ \quad ... \\ \phi_k(t, x_1, x_2, ..., x_n) = c_k \end{cases} \tag{4}$$

olsun. Bütün bu ilk integraller bağımsız ise, yani $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk};\ x_1, x_2, ..., x_n$ yi tamamlayan belli k fonksiyon olmak üzere en az bir determinant

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k)}{D(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk})} \neq 0$$

ise, bu durumda (4) sisteminin k bilinmeyen fonksiyonunu diğerleri cinsinden ifade etmek mümkündür. Bunlar (1) sisteminde yerlerine yazılırsa, problem daha az sayıda bilinmeyenli bir denklem sisteminin integrasyonuna indirgenir. $k = n$ ve tüm integraller bağımsız ise, bu durumda bilinmeyen fonksiyonların tümü (4) sisteminden hesaplanabilir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2 - y^2 - t^2}{2xt} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} \end{cases} \tag{5}$$

sisteminin ilk integrallerini bulunuz.

Çözüm. Verilen sistem simetrik formda

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - t^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dt}{2xt} \tag{6}$$

biçiminde yazılabilir. (6) sistemindeki son iki eşitlik

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dt}{2xt}$$

göz önüne alınırsa, sistemin bir ilk integrali

$$\frac{y}{t} = c_1$$

elde edilir.

Diğer bir ilk integral

$$\frac{xdx + ydy + tdt}{x(x^2 + y^2 + t^2)} = \frac{dy}{2xy}$$

eşitliğinden

$$\frac{x^2 + y^2 + t^2}{y} = c_2$$

olarak bulunur. O halde (5) sisteminin ilk integralleri

$$\phi_1(t,x,y) = \frac{y}{t} = c_1 \tag{7}$$

ve

$$\phi_2(t,x,y) = \frac{x^2+y^2+t^2}{y} = c_2 \tag{8}$$

dir.

Diğer taraftan (7) ve (8) bağımsızdır ve (5) sisteminin çözümü kolaylıkla elde edilebilir.