

İki Boyutlu Hamilton Sistemleri

İki boyutlu otonom

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1)$$

sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} &= -g(x, y), \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} &= f(x, y) \end{aligned}$$

olacak şekilde sürekli ve birinci ve ikinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip olan iki değişkenli bir $H(x, y)$ fonksiyonu varsa, bu durumda (1) sistemine bir *Hamilton sistemi* denir. Böyle bir $H(x, y)$ fonksiyonuna da (1) sisteminin bir *Hamilton fonksiyonu* denir.

Uyarı 1. (1) sistemi bir Hamilton sistemi ise, bu durumda (1) in herhangi bir $(x(t), y(t))$ çözümü boyunca $H(x(t), y(t))$ sabittir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (-g(x(t), y(t)))f(x(t), y(t)) + f(x(t), y(t))g(x(t), y(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $H(x(t), y(t)) = 0$ elde edilir.

Hamilton sistemleri ile ilgili olarak iki önemli soru vardır. Birincisi, verilen bir sistemin Hamilton sistemi olup olmadığı nasıl belirlenir? Diğeri bir sistemin Hamilton sistemi olduğu biliniyorsa, o zaman $H(x, y)$ Hamilton fonksiyonu nasıl bulunur?

Örnek 1.

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

fonksiyonunun

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -v(x) \end{cases} \quad (2)$$

sistemi için bir Hamilton fonksiyonu olduğunu gösteriniz, burada $V(x) = \int_0^x v(s)ds$ dir.

Çözüm. (2) sisteminde $f(x, y) = y$, $g(x, y) = -v(x)$ olup

$$H_x = v(x) = -g(x, y), \quad H_y = y = f(x, y)$$

dir. O halde (2) sistemi bir Hamilton sistemidir.

Örnek 2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 + \cos x \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 1 + y \sin x \end{cases} \quad (3)$$

sisteminin bir Hamilton sistemi olduğunu gösteriniz ve bir Hamilton fonksiyonu bulunuz.

Çözüm. (3) sisteminde $f(x, y) = y^2 + \cos x$, $g(x, y) = 2x + 1 + y \sin x$ olup $f_x = -\sin x$, $g_y = \sin x$ dir. $f_x = -g_y$ olduğundan (3) sistemi bir Hamilton sistemidir.

Diğer taraftan $H(x, y)$ Hamilton fonksiyonu ise, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$H_x(x, y) = -g(x, y) = -2x - 1 - y \sin x \quad (4)$$

ve

$$H_y(x, y) = f(x, y) = y^2 + \cos x \quad (5)$$

(4) eşitliğinin iki yanının x -e göre integrali alınırsa,

$$H(x, y) = -x^2 - x + y \cos x + \varphi(y) \quad (6)$$

elde edilir, burada φ belirlenmesi gereken fonksiyondur. Bunun için (6) nın y -ye göre kısmi türevi alınıp, sağ tarafı (5) in sağ tarafı ile eşitlenirse, $\varphi(y) = \frac{y^3}{3}$ olarak bulunur. O halde (3) sistemi için bir Hamilton fonksiyonu

$$H(x, y) = -x^2 - x + y \cos x + \frac{y^3}{3}$$

dir.