FZM450 Elektro-Optik

7.Hafta

Fresnel Eşitlikleri

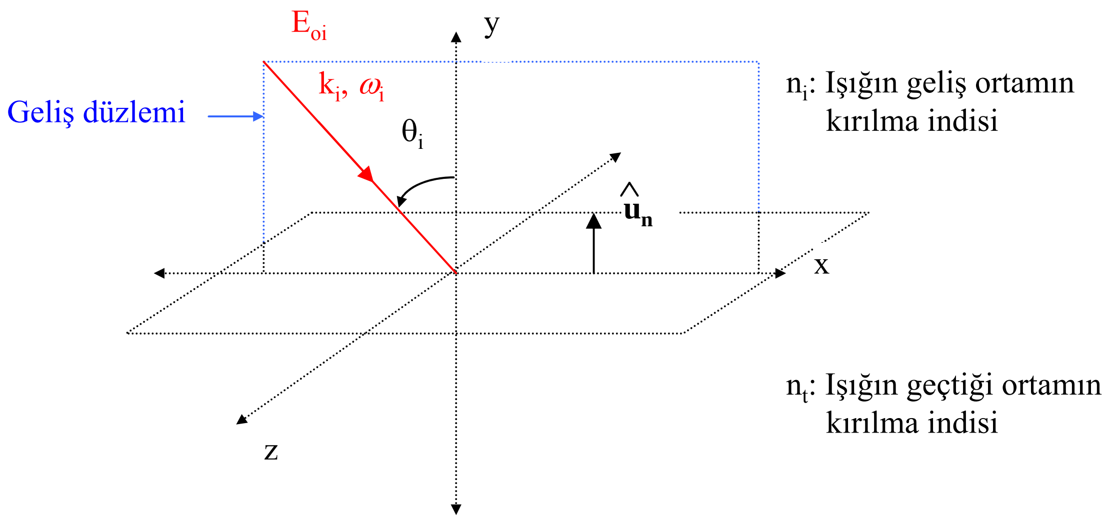
7. Hafta Ders İçeriği

- Fresnel Eşitlikleri
- Yansıma
- Kırılma

Elektromanyetik dalganın dalga özelliklerini kullanarak ışığın farklı kırılma indisine sahip yüzeydeki davranışı incelenecektir

Fresnel Eşitlikleri-1

Şekildeki x-z düzleminin, kırılma indisleri n_i ve n_t olan iki düzlemi ayıran sınır yüzey olduğunu kabül edelim. θ_i açısı ile gelen bir elektromanyetik dalgayı düşünelim



$\boldsymbol{k_i}$: gelen dalganın dalga vektörü,

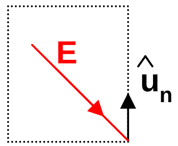
ω_i: EMD'nın açısal frekansı

$\boldsymbol{E_{oi}}$: gelen dalganın genliği

$\boldsymbol{k_i}$, ω_i ve $\boldsymbol{E_{oi}}$ değerlerini bildiğimizi kabül edelim

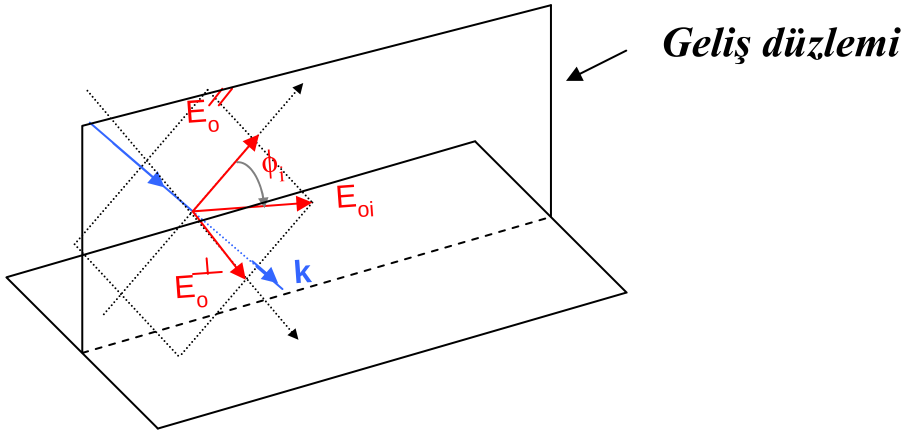
Fresnel Eşitlikleri-2

*Geliş Düzlemi***:** k_i ve düzlem normal vektörü $\mathbf{u_n}$ ile tanımlanan düzlem



$\boldsymbol{E_i}$ alanının yönelimi

ϕ_i: Geliş düzlemi ile elektrik alan $\boldsymbol{E_o}$'nin yaptığı açı

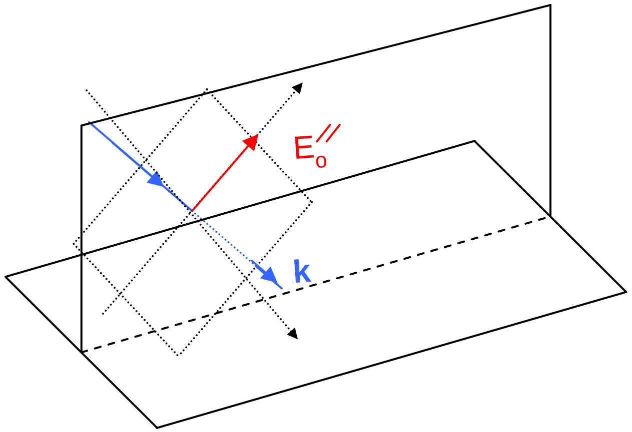


$$\left|\vec{E}_{oi}\right| = \sqrt{(E_{oi}^{\parallel})^2 + (E_{oi}^{\perp})^2}$$

$$\tan \Phi_i = \frac{E_{oi}^{\perp}}{E_{oi}^{\parallel}}$$

Fresnel Eşitlikleri-3

***Durum-I:P-kutuplanması**(alan vektörü (**E**) geliş düzlemine paralel ise*

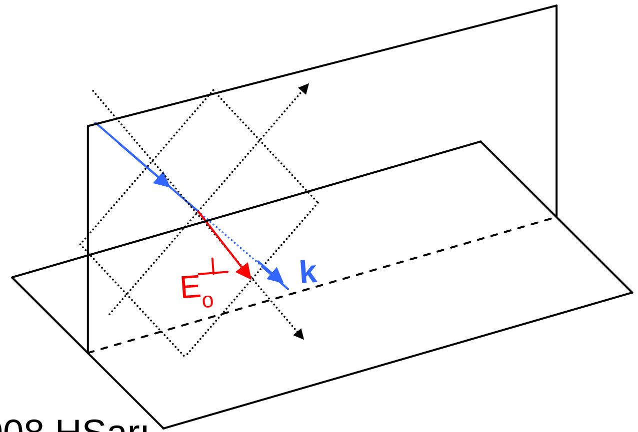


$$\left(E_{oi}^{//} \neq 0,\ E_{oi}^{\perp} = 0\right)$$

$$E_o^{p} = E_{oi}^{//}$$

Transverse Magnetic (TM Kutuplanması)

***Durum-II: S-kutuplanması** (alan vektörü(**E**) geliş düzlemine dik ise*



$$\left(E_{oi}^{//} = 0,\ E_{oi}^{\perp} \neq 0\right)$$

$$E_o^{s} = E_{oi}^{\perp}$$

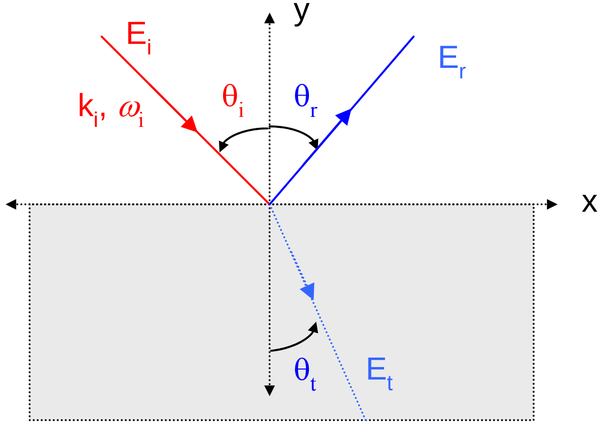
Transverse Electric (TE Kutuplanması)

Fresnel Eşitlikleri-4

Yansıyan (E_r) ve geçen dalgalar (E_t) için elektrik alan vektörleri

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_{oi} e^{i(\boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} - \omega_i t)}$$

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}_{or} e^{i(\boldsymbol{k}_r \boldsymbol{r} - \omega_r t + \phi_r)}$$



$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_{ot} e^{i(\boldsymbol{k}_t \boldsymbol{r} - \omega_t t + \phi_t)}$$

Fresnel Eşitlikleri-5

E_r ve E_t alanlarını nasıl bulabiliriz?

Sınır değerlerden $\mathbf{E_r}$ ve $\mathbf{E_t}$'nin değerlerini bulabiliriz.

Elektromanyetik dalga için sınır değer koşulları:

1) Elektrik alanın **E** teğetsel bileşenleri iki ortamın sınırı boyunca süreklidir

2) **D** alanının normal bileşenleri iki ortamın sınırı boyunca süreklidir

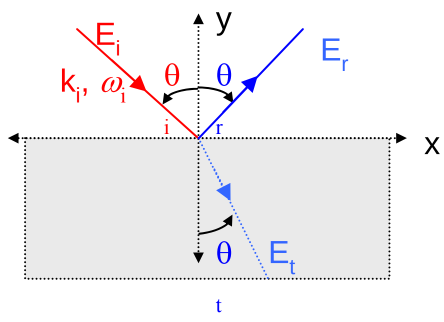
3) Manyetik alanın **H** normal bileşenleri iki ortamın sınırı boyunca süreklidir

4) **B** alanının teğetsel bileşeni iki ortamın sınırı boyunca süreklidir

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu$$

Fresnel Eşitlikleri-6

Yukarıdaki şartları matematiksel olarak ifade etmeye çalışırsak:



(Elektrik alanın sürekliliğinden)

1) $$\left[(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{y=0}\right]_{tegetsel} = \left[(\vec{E}_t)_{y=0}\right]_{tegetsel}$$

2) $$\left[\varepsilon_i(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{y=0}\right]_{normal} = \left[\varepsilon_t(\vec{E}_t)_{y=0}\right]_{normal}$$

(Manyetik alanın sürekliliğinden)

4) $$\left[\frac{1}{\mu_i}(\vec{B}_i + \vec{B}_r)_{y=0}\right]_{tegetsel} = \left[\frac{1}{\mu_t}(\vec{B}_t)_{y=0}\right]_{tegetsel}$$

3) $$\left[(\vec{B}_i + \vec{B}_r)_{y=0}\right]_{normal} = \left[(\vec{B}_t)_{y=0}\right]_{normal}$$

Fresnel Eşitlikleri-7

E ve **B** alanlarını birbirleri cinsinden ifade edersek

$$\frac{|E|}{|B|} = v_m = \frac{c}{n_m} \qquad\qquad |B| = \frac{n_m}{c}|E|$$

v_m: ışığın madde içindeki hızı, n_m: k. indisi

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow n^2 = \varepsilon$$

$$n_m^2 = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_o}$$

$$\mu_i = \mu_r = \mu_t = \mu_o$$ Ortamlar manyetik olmadığından

Yukarıdaki 3 ve 4 nolu denklemler şu şekilde tekrardan yazılabilir:

3') $$\left[\frac{n_i}{c}(\vec{\boldsymbol{E}}_i + \vec{\boldsymbol{E}}_r)_{y=0}\right]_{tegetsel} = \left[\frac{n_t}{c}(\vec{\boldsymbol{E}}_t)_{y=0}\right]_{tegetsel}$$

4') $$\left[\frac{n_i}{c}(\vec{\boldsymbol{E}}_i + \vec{\boldsymbol{E}}_r)_{y=0}\right]_{normal} = \left[\frac{n_t}{c}(\vec{\boldsymbol{E}}_t)_{y=0}\right]_{normal}$$

Fresnel Eşitlikleri-8

Faz eşleme şartından (y=0 da gelen, yansıyan ve geçen dalganın fazları eşit olacağından)

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_{oi} e^{i(\boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} - \omega_i t)}$$

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}_{or} e^{i(\boldsymbol{k}_r \boldsymbol{r} - \omega_r t + \phi_r)}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_{ot} e^{i(\boldsymbol{k}_t \boldsymbol{r} - \omega_t t + \phi_t)}$$

$(\vec{\boldsymbol{E}}_i + \vec{\boldsymbol{E}}_r)_{y=0} = (\vec{\boldsymbol{E}}_t)_{y=0}$ eşitliğinin sağlanması için üstel ifadelerin eşit olması gerekmektedir.

$$(k_i.r - \omega_i t)_{y=0} = (k_r.r - \omega_r t + \phi_r)_{y=0} = (k_t.r - \omega_t t + \phi_t)_{y=0}$$

Bu ifadenin önce zaman kısmının eşitliğine bakalım

EMD'nın frekansı her ortamda aynı olacağından

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$$

Fresnel Eşitlikleri-9

$$(k_i.r-\omega_i t)_{y=0}=(k_r.r-\omega_r t+\phi_r)_{y=0}=(k_t.r-\omega_t t+\phi_t)_{y=0}$$

Uzaysal kısmına bakarsak

$$(k_i.r)_{y=0}=(k_r.r+\phi_r)_{y=0}\Rightarrow\left[(k_i-k_r).r\right]_{y=0}=\phi_r$$

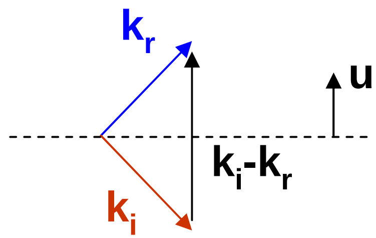
$$(k_i-k_r)_x.x+(k_i-k_r)_z.z=\phi_r$$

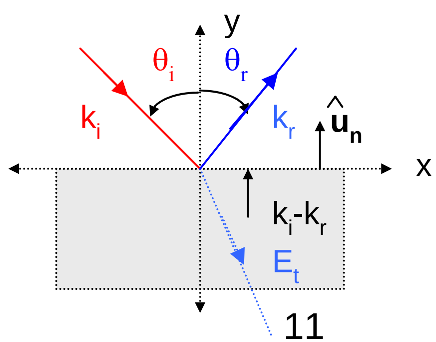
$(k_i\text{-}k_r)_x$= sabit=α
$(k_i\text{-}k_r)_z$= sabit=γ
$\alpha x+\gamma z=\phi_r$

Bu denklemi en genel durum için
$\alpha x+\beta y+\gamma z=\phi$

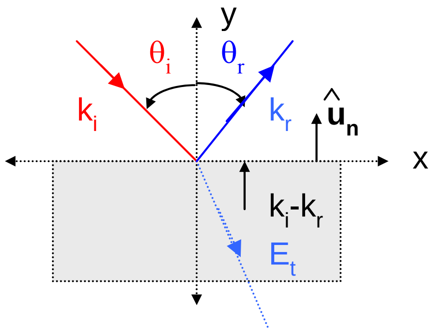
Burada α, β ve γ doğrultma cosinüsleridir. $\alpha x+\gamma z=\phi_r$ Bu x-z düzlemine paralel olan düzlem denklemidir.

- $(\boldsymbol{k_i}\text{-}\boldsymbol{k_r})$ sınıra diktir
- **k** vektörünün büyüklüğü $|\mathbf{k}|=2\pi/\lambda$ dir. $\mathbf{k_i}$ ve $\mathbf{k_r}$ aynı ortamda olduğu için $|\mathbf{k_i}|=|\mathbf{k_r}|$
- $\mathbf{u_n}$ birim vektörü x-z düzlemine dik olduğundan $(\mathbf{k_i}\text{-}\mathbf{k_r})$, $\mathbf{u_n}$'e paraleldir.





Fresnel Eşitlikleri-10

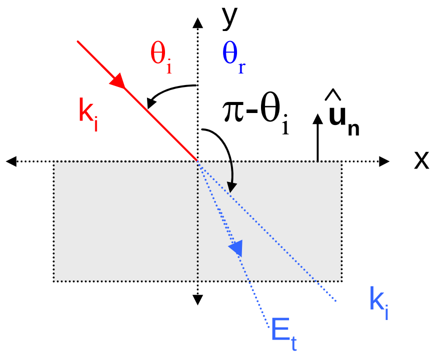


Bu sebepten $\mathbf{u_n} x(\mathbf{k_i}-\mathbf{k_r})=0$

$\mathbf{u_n} x \mathbf{k_i} = \mathbf{u_n} x \mathbf{k_r}$

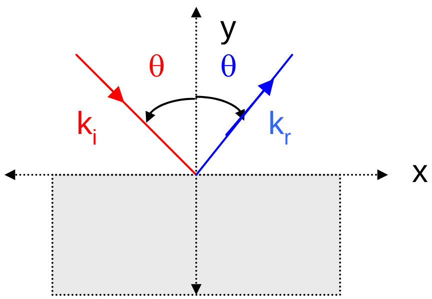
$|\mathbf{u_n}||\mathbf{k_i}|\sin(\pi-\theta_i)=|\mathbf{u_n}||\mathbf{k_r}|\sin(\theta_r)$

$\sin(\pi-\theta_i)=\sin(\theta_r)$



$\sin(\theta_i)=\sin(\theta_r)$ =>

$\boxed{\theta_i=\theta_r \quad \textit{Yansıma Kanunu}}$



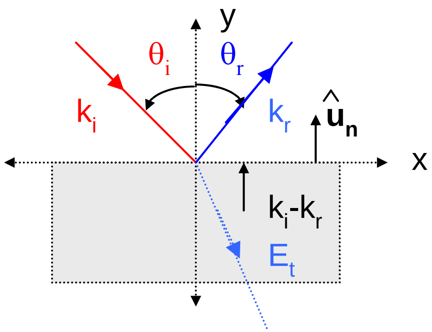
$\theta_i=\theta_r=\theta$

Fresnel Eşitlikleri-11

Işık $\theta_i=\theta_r$ olduğunu nasıl anlar? (Işığın anladığı faz eşlemesini bildiğidir)

$$(\boldsymbol{k}_i . \boldsymbol{r})_{y=0} = (\boldsymbol{k}_t . \boldsymbol{r} + \phi_t)_{y=0}$$

$$\left[(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_t).\boldsymbol{r}\right]_{y=0} = \phi_t$$



Sınıra paralel ve $(\boldsymbol{k}_i\text{-}\boldsymbol{k}_t)$ normal düzlem denklemi

Bu sebepten

$\mathbf{u_n} \mathrm{x} (\mathbf{k_i}\text{-}\mathbf{k_t})=0$

$\mathbf{u_n} \mathrm{x} \mathbf{k_i} = \mathbf{u_n} \mathrm{x} \mathbf{k_t}$

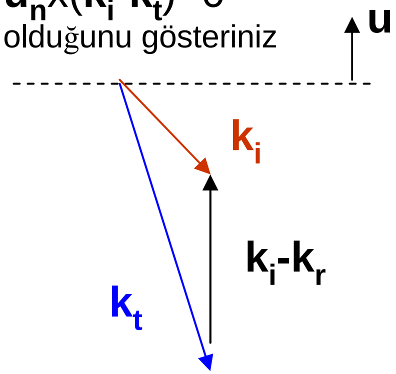
$|\mathbf{u_n}||\mathbf{k_i}|\sin(\pi-\theta_i)=|\mathbf{u_n}||\mathbf{k_t}|\sin(\theta_t)$

Ortamlar farklı olduğundan $|\mathbf{k_i}|\neq|\mathbf{k_t}|$

Ödev 1:

$\mathbf{u_n} \mathrm{x} (\mathbf{k_i}\text{-}\mathbf{k_t})=0$

olduğunu gösteriniz

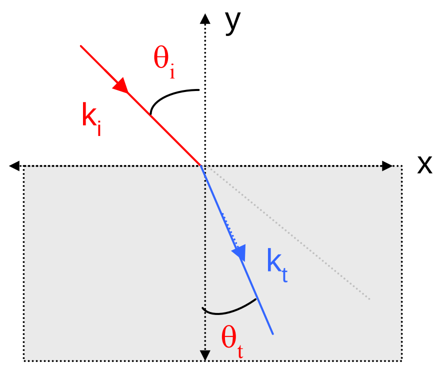


$|\mathbf{k_i}|\sin(\theta_i)=|\mathbf{k_t}|\sin(\theta_t)$

$|\mathbf{k_i}|=\omega_i/v_i= \omega_i/(c/n_i)=(\omega_i /c).n_i$

$|\mathbf{k_t}|=\omega_t/v_t= \omega_t/(c/n_t)=(\omega_t/c).n_t$

$n_i\sin(\theta_i)=n_t\sin(\theta_t)$ ***Snell Yasası***



Fresnel Eşitlikleri-12

Genliklerin Eşitliği Şartından

S-kutuplanmış ışın:

1) $$(\vec{E}^{s}_{oi} + \vec{E}^{s}_{or})_{tegetsel} = (\vec{E}^{s}_{ot})_{tegetsel}$$

2) $$\hat{u}_n.(\varepsilon_i \vec{E}^{s}_{oi} + \varepsilon_i \vec{E}^{s}_{or}) = (\varepsilon_t \vec{E}^{s}_{ot}).\hat{u}_n$$

(s-kutuplanmış dalgada hiç normal bileşen yoktur)

Bir denklem ve iki tane bilinmeyen var. Dolayısı ile bir denkleme, ki bu da manyetik alanı içeren denklem olacaktır, daha ihtiyacımız olacaktır.

(Teğetsel **H** bileşeni sürekli olacaktır)

3) $$-\frac{B^{s}_{oi}}{\mu_i}\cos\theta_i + -\frac{B^{s}_{or}}{\mu_r}\cos\theta_r = -\frac{B^{s}_{ot}}{\mu_t}\cos\theta_t$$

Ortamlar manyetik olmadığı için $\mu_i = \mu_r = \mu_t = \mu_o$

$$\frac{E_{oi}}{B_{oi}} = v_i = \frac{c}{n_i} \Rightarrow B_{oi} = \frac{n_i}{c} E_{oi}$$

3’) $$-E^{s}_{oi} n_i \cos\theta_i + E^{s}_{or} n_i \cos\theta_r = -E^{s}_{ot} n_t \cos\theta_t$$

Fresnel Eşitlikleri-13

3') $$-E_{oi}^{s} n_i \cos\theta_i + E_{or}^{s} n_i \cos\theta_r = -E_{ot}^{s} n_t \cos\theta_t$$

$\theta_i = \theta_r$ olduğundan => $\cos\theta_r = \cos\theta_i$

$$\frac{E_{or}^{s}}{E_{oi}^{s}} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$

$$\frac{E_{ot}^{s}}{E_{oi}^{s}} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$

Fresnel Eşitlikleri-14

Fresnel katsayılarının Tanımı:

Fresnel katsayıları *s*- ve *p-kutuplu* EMD için yansıma ve geçiş katsayılarını verir.

$$r_s \equiv \frac{E_{or}^{s}}{E_{oi}^{s}}$$ s-kutuplu EMD için yansıtma katsayısı

$$t_s \equiv \frac{E_{ot}^{s}}{E_{oi}^{s}}$$ s-kutuplu EMD için geçirme katsayısı

$$r_p \equiv \frac{E_{or}^{p}}{E_{oi}^{p}}$$ p-kutuplu EMD için yansıtma katsayısı

$$t_p \equiv \frac{E_{ot}^{p}}{E_{oi}^{p}}$$ p-kutuplu EMD için geçirme katsayısı

Fresnel Eşitlikleri-15

s-kutuplanması için Fresnel katsayıları

$$r_s \equiv \frac{E_{or}^s}{E_{oi}^s} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$

$$t_s \equiv \frac{E_{ot}^s}{E_{oi}^s} = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i}$$

p-kutuplanmış ışın Fresnel katsayıları:

$$r_p = \frac{E_{or}^p}{E_{oi}^p} = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t}$$

$$t_p = \frac{E_{ot}^p}{E_{oi}^p} = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t}$$

Fresnel Eşitlikleri-16

Ödev 2:

Yukarıdaki Fresnel katsayılarını dahada basitleştirirsek (Snell Kanunu kullanılarak yapılabilir)

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \qquad t_s = +\frac{2\sin\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_p = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \qquad t_p = +\frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}$$

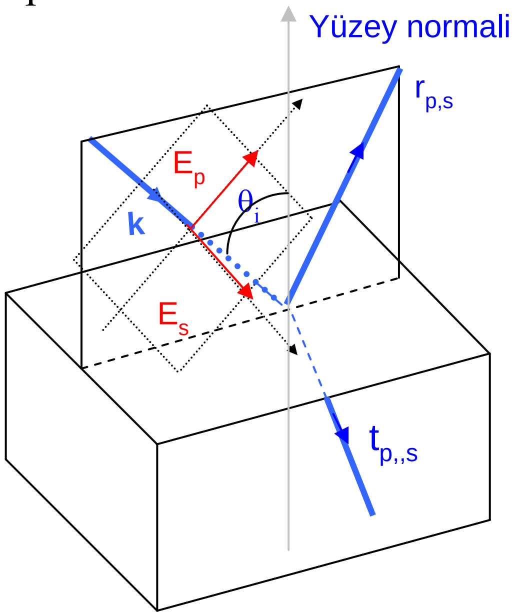
Fresnel Eşitlikleri-16

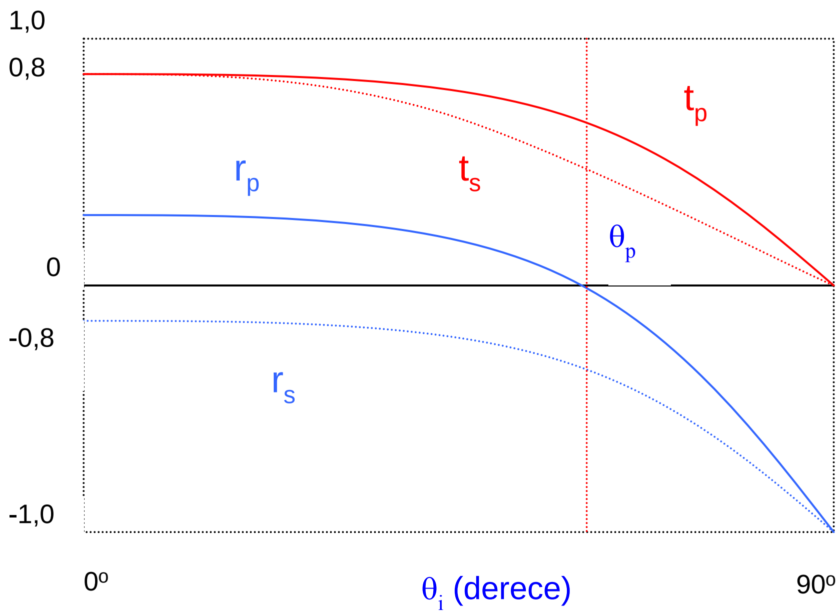
Eğer $n_t > n_i$ olduğunda $\theta_i > \theta_t$ ve r_s bütün θ_i değerleri için negatiftir.
Buna karşılık r_p, $\theta_i = 0^o$ da pozitif bir değerden başlayarak yavaşca azalır ve $\theta_i + \theta_t = 90^o$ olduğu zaman sıfıra eşit olur ve θ_i'nin bu değerinin ötesindeki değerlerde de negatif olur. Negatif değerin anlamı gelen ve yansıyan dalga arasında 180^o'lik faz farkının oluştuğudur

r_p'nin sıfır olduğu bu özel geliş açısına ***kutuplanma açısı*** denir ve θ_p ile gösterilir.

Hava-cam yüzeyi için bu değer $\theta_p = 56{,}3^o$ dir.

Kutuplanma açısının anlamı bu değerde gelen kutuplanmamış bir EMD, yansıdıktan sonra kutupanacaktır.





Hava-cam yüzeyi için Fresnel katsayıları

Fresnel Eşitlikleri-16

Yansıtma(reflectance) R

$$R_s = \left| r_s \right|^2$$

$$R_p = \left| r_p \right|^2$$

Normal doğrultuda gelen ışın için θ=0 R_s ve R_p değerleri aynı değere yaklaşır

$$R_s = R_s = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2$$

Ödev 3:

Havadan cam yüzeyine normal geliş açısında gelen ışığın yüzde kaçı geri yansır?