FZM450 Elektro-Optik

4.Hafta

Işığın Elektromanyetik Tanımlanması-3:

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi

4. Hafta Ders İçeriği

- Işığın kristal içinde ilerleyişi
- İzotropik olmayan kristaller
  - Kübik kristaller
  - Tek Eksenli Kristaller
  - Çift Eksenli Kristaller
- Optik eksen tanımı
- Çift kırılma

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-1

Kristalin diğer ortamlardan, elektromanyetik dalganın ilerleyişi düşünüldüğünde, en önemli farklılığı kristallerin elektriksel olarak anizotropik özellik gösterebilmesidir yani farklı yönlerdeki elektriksel özelliği farklı olabilmektedir

Bunun anlamı uygulanan elektrik alan ile kristalin polarizasyonu (kutuplanması) izotropik kristallerde olduğu gibi bir skaler (χ) ile elektrik alanın (E) çarpımı gibi basit değildir

$\mathbf{P}=\varepsilon_o\chi\mathbf{E}$ χ=skaler (izotropik ortam)

$\mathbf{P}=\varepsilon_o\boldsymbol{\chi}\mathbf{E}$ $\boldsymbol{\chi}$=tensör (kristal)

Bu kutuplanma kristalin yönelimine bağlıdır

$\mathbf{P}=\varepsilon_o\boldsymbol{\chi}\mathbf{E}$

Bunun optoelektronikteki en belirgin sonucu ışığın kristal içersindeki ilerleyişi kristalin yönelimine oldukça bağımlı oluşudur.

P nin **E** ye bağlılığı tensör nicelik olarak ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11}\chi_{12}\chi_{13} \\ \chi_{21}\chi_{22}\chi_{23} \\ \chi_{31}\chi_{32}\chi_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Bunu $\mathbf{P}=\varepsilon_o\boldsymbol{\chi}\mathbf{E}$ şeklinde yazabiliriz. Burada χ alınganlık tensörüdür ve en genel olarak

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11}\chi_{12}\chi_{13} \\ \chi_{21}\chi_{22}\chi_{23} \\ \chi_{31}\chi_{32}\chi_{33} \end{bmatrix}$$

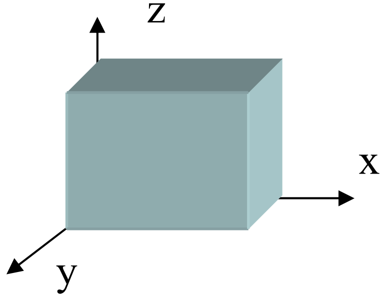
Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-2

Buna karşı gelen yerdeğiştirme vektörü **D** ise $\mathbf{D}=\varepsilon_o(\mathbf{1}+\chi)\mathbf{E}=\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}$,

ve $\varepsilon=\varepsilon_o(1+\chi)$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sıradan ve soğurucu olmayan bir kristal için bu tensör simetriktir ve her zaman 3 tane temel eksen bulunabilir



$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

Durum-I: İzotropik Madde

$$\boldsymbol{D}_i = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_o \kappa \boldsymbol{E}$$

(ε, κ skaler)

$\mathbf{P}=\varepsilon_o\chi\mathbf{E}$ (χ skaler)

Durum-II: İzotropik olmayan Maddeler (Soğurma yok)

$$\boldsymbol{D}_i = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_o \kappa \boldsymbol{E}$$

(ε, κ tensör)

$\mathbf{P}=\varepsilon_o\chi\mathbf{E}$ (χ tensör)

$$D_x=\varepsilon_o[\kappa_{xx}E_x+\kappa_{xy}E_y+\kappa_{xz}E_z]$$
$$D_y=\varepsilon_o[\kappa_{yx}E_x+\kappa_{yy}E_y+\kappa_{yz}E_z]$$
$$D_z=\varepsilon_o[\kappa_{zx}E_x+\kappa_{zy}E_y+\kappa_{zz}E_z]$$

$$D_i = \varepsilon_o \sum_{j=1}^{3} \kappa_{ij} E_j$$

Burada κ maddenin boyutsuz dielektrik sabitidir

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-3

Durum-II: İzotropik olmayan Maddeler (Soğurma yok)

$$D_x=\varepsilon_o[\kappa_{xx}E_x+\kappa_{xy}E_y+\kappa_{xz}E_z]$$
$$D_y=\varepsilon_o[\kappa_{yx}E_x+\kappa_{yy}E_y+\kappa_{yz}E_z]$$
$$D_z=\varepsilon_o[\kappa_{zx}E_x+\kappa_{zy}E_y+\kappa_{zz}E_z]$$

Bu durumda yani anizotropik madde içinde **D**, **E**'ye paralel değildir (tensörel özellikten)

$$D_i=\varepsilon_o\sum_{j=1}^{3}\kappa_{ij}E_j$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde D alanını matriks notasyonunda da aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}=\varepsilon_0\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Eğer yukarda kullandığımız x-y-z koordinat sistemini kristalin eksenleri cinsinden ifade edresek κ matrisi diyagonal dışındaki bileşenleri sıfır olur ve daha basit bir görünüm kazanır.

$$\kappa_{ij}=\begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-4

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad n = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}}$$

Durum-I Kübik sistem(Bakır, gümüş, sodyum Al metal sistemleri)

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} \end{bmatrix} \qquad \kappa_{11}=\kappa_{22}=\kappa_{33}$$

Durum-II Tek eksenli kristal sistem(Kuartz, Kalsit)

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad \kappa_{11} \neq \kappa_{33}$$

Durum-III Çift eksenli kristal sistem(Mika)

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad \kappa_{11} \neq \kappa_{22} \neq \kappa_{33}$$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-5

Durum-I Kübik sistem(Bakır, gümüş, sodyum Al metal sistemleri)

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} \end{bmatrix}$$

Kristal içinde Maxwell denklemlerini yazıp çözüm bulmaya çalışalım

$$\nabla.\boldsymbol{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$
$$\nabla.\boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Burada

$$\boldsymbol{D_i} = \varepsilon_o \kappa_{ij} E_j \qquad \boldsymbol{B}=\mu_o \boldsymbol{H} \qquad \sigma_{ij}=0$$

$$\nabla x(\nabla x E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla x B) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}(\nabla x H) = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial D}{\partial t})$$

$\nabla x(\nabla x E) = -\nabla^2 E + \nabla(\nabla.E)$ Vektörel eşitliği kullanırsak

$$-\nabla^2 E + \nabla(\nabla.E) = -\mu_o \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

A=kB A=CB
A//B

Burada $\vec{\nabla}.\boldsymbol{E} \neq \vec{\nabla}\boldsymbol{D}$

Çünkü izotropik ortamda ε skaler olmasına karşın anizotropik ortamda ε matrisdir ve **E** ile **D** birbirine paralel değildir!

Ödev: Matematiksel olarak E ile D nin paralel olmadığını gösteriniz

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-6

$$\vec{\nabla}.\boldsymbol{D} = \frac{\partial \boldsymbol{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{D}_z}{\partial z} = \frac{\partial(\kappa_{1y} E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\kappa_{2y} E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\kappa_{3y} E_z)}{\partial z}$$

Burada dielektrik sabitler κ_{1y}, κ_{2y} ve κ_{3y} ortak değillerdir

Yukardaki ifadede $\nabla(\nabla.E) \neq 0$ olduğu için dalga denklemini buna göre çözmemiz gerekecektir.

$$-\nabla^2 E + \nabla(\nabla.E) = -\mu_o \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

Hangi durumda yukardaki denklem dalga çözümlüdür? Çözümümüzün dalga formunda olduğunu kabül edersek

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_o} e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D_o} e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H_o} e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

$$\nabla.\boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{E}$$

$$\nabla.(\nabla.\boldsymbol{E}) = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(i\boldsymbol{kE}) + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(i\boldsymbol{kE}) + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(i\boldsymbol{kE})$$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-7

x-bileşeni için

$$\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(i\boldsymbol{kE}) = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z) = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(ik_x e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} + \ldots) = i[ik_x ik_x E_x + \ldots]$$

$$\nabla.(\nabla.\boldsymbol{E}) = \hat{\mathbf{i}}k_x[\boldsymbol{kE}] + \hat{\mathbf{j}}k_y[\boldsymbol{kE}] + \hat{\mathbf{k}}k_z[\boldsymbol{kE}] = \boldsymbol{k}.[\boldsymbol{kE}]$$

$$-\nabla^2 E + \nabla(\nabla.E) = -\mu_o \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} + (-\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}]) = -\mu_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2}$$

Işığın anizotropik ortamda ilerleyişini belirleyen dalga denklemi

Herhangi bir maddede $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{D}=0$ fakat en genel olarak $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}\neq 0$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-7

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} + (-\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}]) = -\mu_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2}$$

İzotropik madde (bütün doğrultularda aynı elektriksel özellik gösteren) için bulduğumuz denklemi çözelim

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad \Rightarrow \qquad -\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}] + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k})\boldsymbol{E} = \mu_o \omega^2 \boldsymbol{D}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \nabla^2 (\boldsymbol{E}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}) = -(k.k)E$$

Homojen ve izotropik madde için $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}=0$ ve $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ olduğundan

$$0+k^2\boldsymbol{E}=\mu_o\omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$(k^2-\mu_o\omega^2\varepsilon)\boldsymbol{E}=0$$

Bu denklemin çözümünün

$$k^2-\mu_o\omega^2\varepsilon=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_o \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{|k|} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}} = v_{faz}$$

$$\vec{k} = |\vec{k}|\hat{k} = \frac{\omega}{v}\hat{k} = \frac{\omega}{c/n}\hat{k} = n\frac{\omega}{c}\hat{k}$$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-7

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} + (-\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}]) = -\mu_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2}$$

İşlemleri kolaylaştıracak boyutsuz bir nicelik $\tilde{k}$ tanımı yaparsak $\tilde{k} = n\hat{k}$

$$\tilde{k}\tilde{k} = n^2$$

boyutsuz bir vektör, yönü yayılma yönünde, büyüklüğü ise kırılma indisi n'e eşit.

$$\vec{k} = |\vec{k}|\hat{k} = \frac{\omega}{v}\hat{k} = (\frac{\omega}{c})n\hat{k} \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\tilde{k}$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} + (-\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}.\boldsymbol{E}]) = -\mu_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} \longrightarrow -\mu_o \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \mu_o \omega^2 D$$

$$k.[k.E] = \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{k}.[\tilde{k}E]$$

$$\nabla^2 E = -k.kE = -\frac{\omega^2}{c^2}(\tilde{k}.\tilde{k})E$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{k}\left[\tilde{k}.E\right] + \frac{\omega^2}{c^2}(\tilde{k}.\tilde{k})E = \mu_o \omega^2 D$$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-8

$$\tilde{k}\tilde{k} = n^2$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{k}\left[\tilde{k}.E\right] + \frac{\omega^2}{c^2}(\tilde{k}.\tilde{k})E = \mu_o \omega^2 D$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j = \mu_o \varepsilon_o \kappa_{ij} E_j$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}(\tilde{k}.\tilde{k})E = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 E$$

$$D_x = \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z$$

$$-\frac{1}{c^2}\tilde{\boldsymbol{k}}_i\left[\tilde{\boldsymbol{k}}.\boldsymbol{E}\right] + \frac{n^2}{c^2}\boldsymbol{E}_i = \mu_o \boldsymbol{D}_i = \mu_o \varepsilon_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{E}_j = \mu_o \varepsilon_{\boldsymbol{o}} \kappa_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{E}_j$$

Boyutsuz formda karekteristik denklem

$$n^2 \boldsymbol{E}_i - \tilde{k}_i(\tilde{k}_j E_j) - \kappa_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{E}_j = 0$$

E_j yi parantez dışına nasıl alırız? Kranecker delta notasyonunu kullanarak elektrik alanları

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & eger\ i = j \\ 0 & eger\ i \neq j \end{cases} \qquad \boldsymbol{E}_i = \delta_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{E}_j$$

şeklinde yazabiliriz

$$n^2 \delta_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{E}_j - \tilde{k}_i(\tilde{k}_j E_j) - \kappa_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{E}_j = 0$$

$$(n^2 \delta_{\boldsymbol{ij}} - \tilde{k}_i \tilde{k}_j - \kappa_{\boldsymbol{ij}})\boldsymbol{E}_j = 0$$

$$(n^2 \delta_{ij} - \tilde{k}_i \tilde{k}_j - \kappa_{ij}) \equiv M_{ij}$$

$$M_{ij} E_j = 0$$

n: Öz değerler

E_j: Öz fonksiyonlar

$$M_{ij}(n) E_j = 0$$

$$M_{1j} E_j = M_{11} E_1 + M_{12} E_2 + M_{13} E_3$$

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-9

Bu bir özdeğer probleminden başka birşey değildir. Yani genel olarak

$$A_{ij}E_j = aE_j$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Burada *a* özdeğer, E_j'ler ise öz fonksiyonlardır.

$$(A_{ij} - a\delta_{ij})E_j = 0 \qquad (A_{ij} - a\delta_{ij}) \equiv M_{ij}(a)$$

$$M_{ij}(a)E_j = 0$$

$\det M_{ij}(a)=0$ ifadesinden özdeğerler bulunur: a_1 , a_2 gibi

özdeğerler $A_{ij}E_j = aE_j$ İfadesinde kullanılarak öz fonksiyonlar E_j bulunur

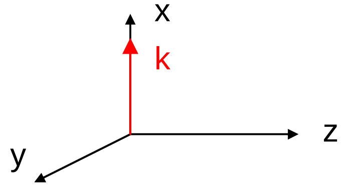
Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-9

Kübik sistem için yukardaki denklemleri uygulayalım. **k**'nın yönünün x-doğrultusunda olduğunu kabül edelim (**k**=î)

Boyutsuz $\tilde{k}$ niceliği

$$\tilde{k}_1 = n\hat{i}$$
$$\tilde{k}_2 = 0$$
$$\tilde{k}_3 = 0$$

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} \end{bmatrix}$$



$$\tilde{k}_i = n\hat{k}_i \qquad \tilde{k}_j = n\hat{k}_j$$

$$\tilde{k}_i\tilde{k}_j = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M_{ij} matrisi

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} n^2 - \kappa_{11} - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & n^2 - \kappa_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} - n^2 \end{bmatrix}$$

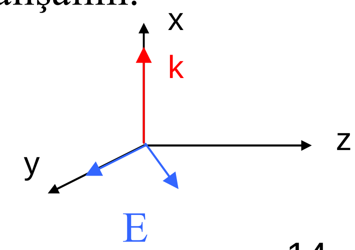
$\det M_{ij}=0$ ifadesinden özdeğerleri bulabiliriz. Bu özdeğerler:

$\kappa_{11}[(\kappa_{11}-n^2)^2]=0 \Rightarrow n^2=\kappa_{11}$ veya $n=(\kappa_{11})^{1/2}$

Daha önce bulunan sonuçlarla aynı!

Elektrik alanı (yani her öz değere karşı gelen öz fonksiyonları) bulmaya çalışalım:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \kappa_{11}E_1 + 0 + 0 = 0 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=0 \end{array}$$

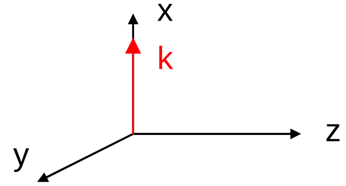


$E_1=0$, E_2=keyfi, E_3=keyfi ($E_x=0$, $E_y \neq 0$, $E_z \neq 0$)

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-10

Tek eksenli (uniaxial) sistem (bir yöndeki optik özellik diğer iki yöndekinden ayrı olan sistemler):
Tek eksenli sistemde x-y düzlemi aynı fakat z-yönünü farklıdır. κ matrisi

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$



k'nın x-doğrultusunda olduğunu kabül edelim

$$\tilde{k}_1 = n\hat{i} \qquad \tilde{k}_2 = 0 \qquad \tilde{k}_3 = 0$$

$$\tilde{k}_i \tilde{k}_j = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D_{ij} matrisi

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -n^2 + \kappa_{11} + n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -n^2 + \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 + \kappa_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} - n^2 \end{bmatrix}$$

Özdeğerleri bulmaya çalışırsak:

$\mathrm{Det}M_{ij}(n)=0 \Rightarrow \kappa_{11}[(\kappa_{11}-n).(\kappa_{33}-n)]=0$ => Birbirinden farklı iki çözüm vardır, bunlar:

$$n_1=\kappa_{11} \text{ ve } n_2=\kappa_{33}$$

$n_1=(\kappa_{11})^{1/2} \equiv n_o$ => o-ışını [normal ışın (ordinary-ray)]

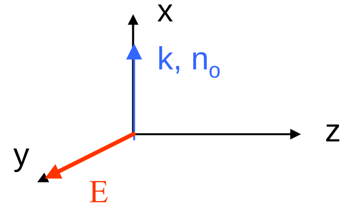
$n_2=(\kappa_{33})^{1/2} \equiv n_e$ => e-ışını [anormal ışın (extraordinary ray)]

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-11

Alanlara bakalım(öz fonksiyonlar):

$n=(\kappa_{11})^{1/2}\equiv n_o$ o-ışını (normal ışın) durumu için:

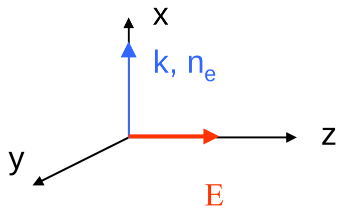
$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}-\kappa_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^o \\ E_2^o \\ E_3^o \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \kappa_{11}E_1^o + 0 + 0 = 0 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+(\kappa_{33}-\kappa_{11})E_3^o = 0 \end{matrix}$$



$E_1=0$, E_2=keyfi, $E_3=0$ (alan vektörü ilerleme yönünde sıfır, alan y-yönünde kutuplanmıştır)

$n=(\kappa_{33})^{1/2}\equiv n_e$ e-ışını (anormal ışın) durumunu inceleyelim. Bu değere karşı gelen alan vektörleri

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11}-\kappa_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^e \\ E_2^e \\ E_3^e \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \kappa_{11}E_1^e + 0 + 0 = 0 \\ 0+(\kappa_{11}-\kappa_{33})E_2^e + 0 = 0 \\ 0+0+0=0 \end{matrix}$$



$$\kappa_{11} \neq 0 \Rightarrow E_1^o = 0$$

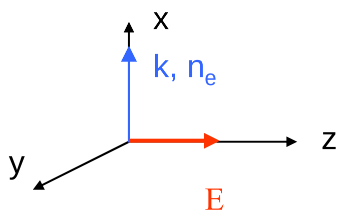
$$(\kappa_{11}-\kappa_{33}) \Rightarrow E_2^o = 0$$

$E_1=0$, $E_2=0$, E_3=keyfi (elektrik alan z-yönünde kutuplanmıştır!)

Kristal İçinde Elektromanyetik Dalganın İlerleyişi-11

Bu sonuçlar bize tek eksenli sistemde aynı anda iki tane ilerleyen dalga olduğunu söylemektedir.

Bu ışın demeti x-yönünde ilerlemesine rağmen alan yönü y-yönündedir ve n_o gibi kırılma indisini görmektedir. Bunun yanında diğer alan yönü z-doğrultusunda olup y-yönündeki alandan farklı olarak n_e kırılma indisini görmektedir.
İki dalga aynı maddede ilerlemesine karşın elektrik alanının nasıl kutuplandığına bağlı olarak farklı iki kırılma indisi görmektedir.

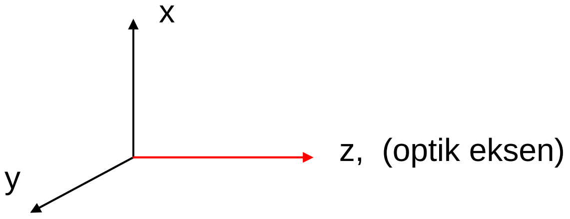


Optik Eksen

Optik olarak izotropik olan maddelerde tek bir kırılma indisi vardır, ışık her yönde aynı hızla yayılır ve ışığın hızı kristaldaki yayılma doğrultusundan bağımsızdır.

Optik olarak izotropik olmayan maddelerde ise, örneğin tek eksenli optik sistemlerde, ışık kristaldeki yayılma doğrultusuna bağlı olarak farklı kırılma indisleri görebilir ve buna bağlı olarak da farklı doğrultularda farklı hızlarla ilerler

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$



x ve y eksenleri aynı
z ekseni ise farklı (optik eksen)

Işık z doğrultusunda ilerlerse elektrik alan ister x, isterse y doğrultusunda olsun ışık kristal içinde aynı hızda ilerler. Ancak ışık x veya y doğrultusunda ilerlerse, E alanın y veya z de oluşuna bağlı olarak kristal içinde farklı doğrultularda ilerler

Tek eksenli optik kristallerde ışığın gördüğü kırılma indisine bağlı olarak bu doğrultuları ayırd etmek için bu ışınlardan birine "normal ışın", diğerine "anormal" ışın denir.

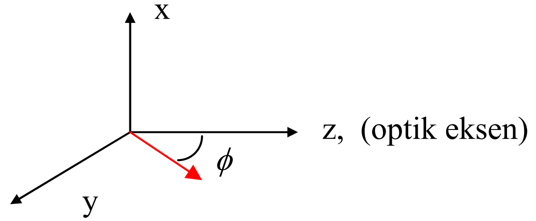
Çift Kırılma

Tek eksenli malzemelerde ışığın gördüğü kırılma indisi elektrik alanın yönelimine bağlı olarak farklı olacaktır. Böyle malzemeler, farklı indislere sahip olduklarından Çift kırıcı malzemeler denir.

Çift Kırılma

Şimdi tek eksenli bir sistemde genel bir duruma bakalım. Optik eksen (z) boyunca değilde optik eksen ile belli bir açı (ϕ) yaparak ilerleyen bir elektromanyetik dalgayı düşünelim

$$\tilde{k}_1 = 0$$
$$\tilde{k}_2 = n\sin\phi$$
$$\tilde{k}_3 = n\cos\phi$$



$$n^2\delta_{ij} = \begin{bmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{bmatrix} \qquad \kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \qquad \tilde{k}_i\tilde{k}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2\sin^2\phi & n^2\sin\phi\cos\phi \\ 0 & n^2\sin\phi\cos\phi & n^2\cos^2\phi \end{bmatrix}$$

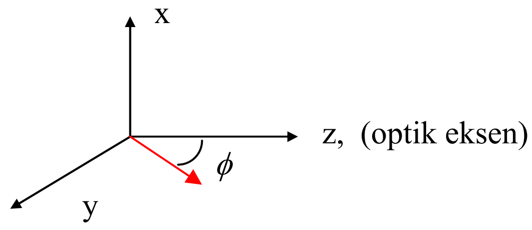
Karekterisrik denklemde $(n^2\delta_{ij} - \tilde{k}_i\tilde{k}_j - \kappa_{ij}) \equiv M_{ij}$ yukardaki ifadeleri kullanırsak D_{ij} matrisi

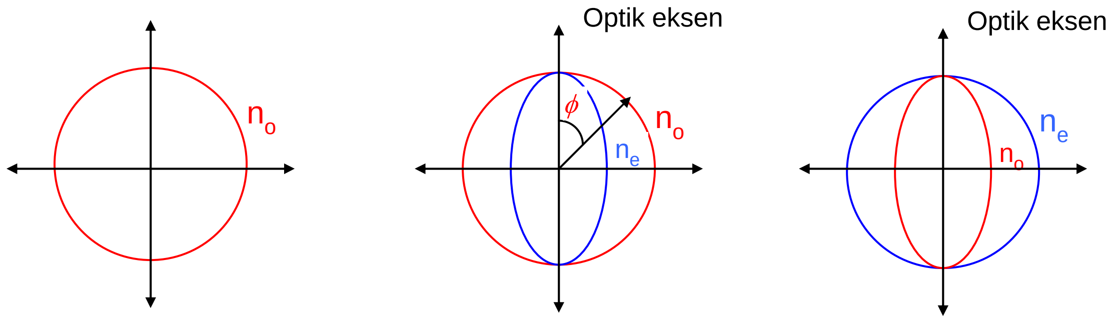
$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} + n^2(\sin^2\phi - 1) & n^2\sin\phi\cos\phi \\ 0 & n^2\sin\phi\cos\phi & \kappa_{33} + n^2(\cos^2\phi - 1) \end{bmatrix}$$

Eğer bir ışık demeti z-y doğrultusunda ilerlerse o-ışını ϕ açısından bağımsız olarak n_o kırılma indisini görecektir. Ancak e-ışını hareket doğrultusuna bağlı olarak farklı n indisini görecektir.

Çift Kırılma

$$\frac{1}{n^2(\phi)} = \frac{\sin^2\phi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\phi}{n_o^2}$$





Optik olarak izotropik kristal
n_o

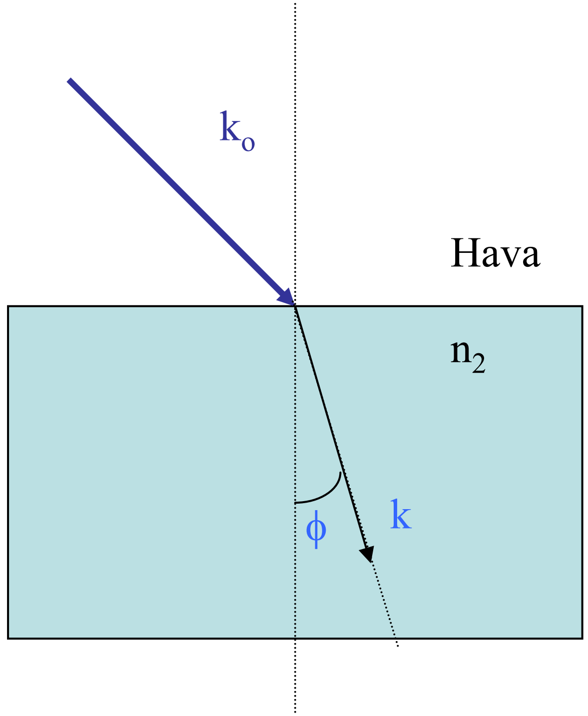
Pozitif tek eksenli kristal
$n_e<n_o$

Negatif tek eksenli kristal
$n_e>n_o$

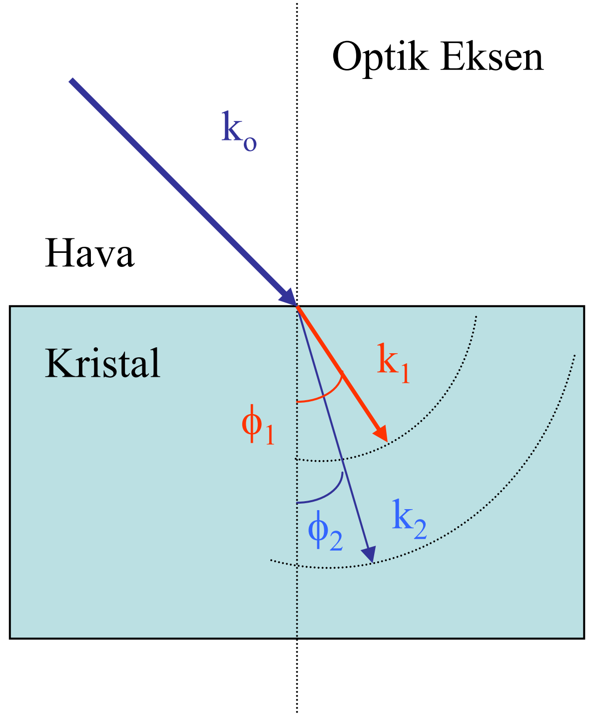
Çift kırılmada kırılma indisinin küçük olduğu eksene hızlı eksen,
büyük olduğu eksene yavaş eksen de denir

$n_e < n_o$ durumunda n_e hızlı eksen, n_o ise yavaş eksendir

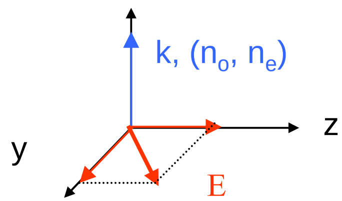
Çift Kırılma



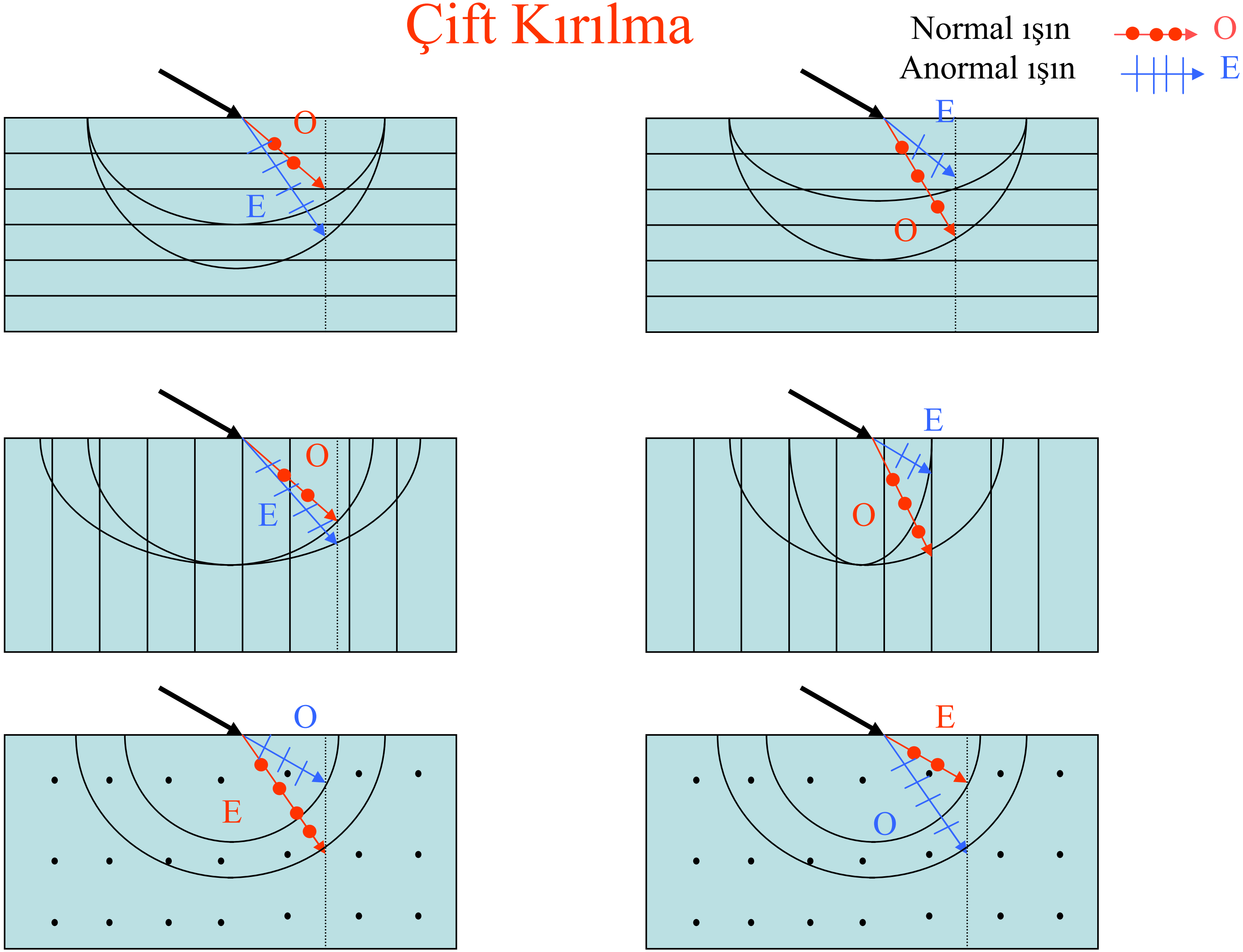
İzotropik Madde



Anizotropik Madde



Çift Kırılma



Tek eksenli pozitif

Tek eksenli negatif

Çift Kırılma

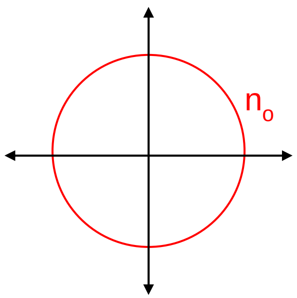
Daha önce de belirtildiği gibi normal cam optik olarak izotropik olduğu için ışığın cam içindeki ilerleyişi yönden bağımsız olarak her doğrultuda aynıdır ve bildiğimiz adi cam tek bir kırılma indisi ile ifade edilebilir. Tek eksenli optik kristaller yukardaki hesaplamalarda da görüldüğü gibi ışığın bu kristallerdeki ilerleme yönüne bağlı olarak farklı kırılma indisine sahiptirler.

Bu indisler sırası ile normal (n_o) ve anormal (n_e) kırılma indisleridir. Tek eksenli kristallere kalsit ($CaCO_3$), kuartz (SiO_2) ve KDP (potasyum dihidrojen fosfat, KH_2PO_4) örnek olarak verilebilir. Tek eksenli bir kristalde kırılma indisleri farklı olduğu için ışığın ilerleme hızı ışığın kutuplanma doğrultusuna ve ilerleme yönüne bağlı olacaktır. Bu tip kristaller çiftkırıcı (birefringent) veya çift kırılma indisli (doubly refracting) olarak bilinir.

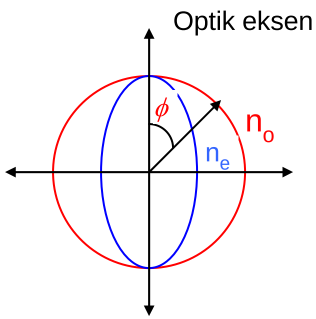
Kuartz için n_o ve n_e değerleri
n_o=1,5443
n_e=1,5534
Faz hızı $v_o>v_e$

Kalkita için n_o ve n_e değerleri
n_o=1,6584
n_e=1,4864
Faz hızı $v_o<v_e$

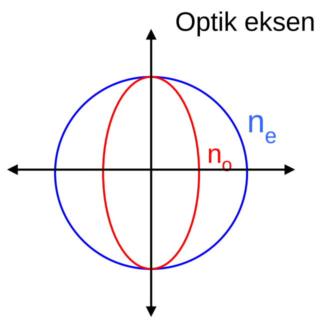
Şimdi tek eksenli bir sistemde genel bir duruma bakalım. Optik eksen (z) boyunca değilde optik eksen ile belli bir açı (ϕ) yaparak ilerleyen elektromanyetik dalgayı düşünelim.



Optik olarak izotropik kristal
n_o



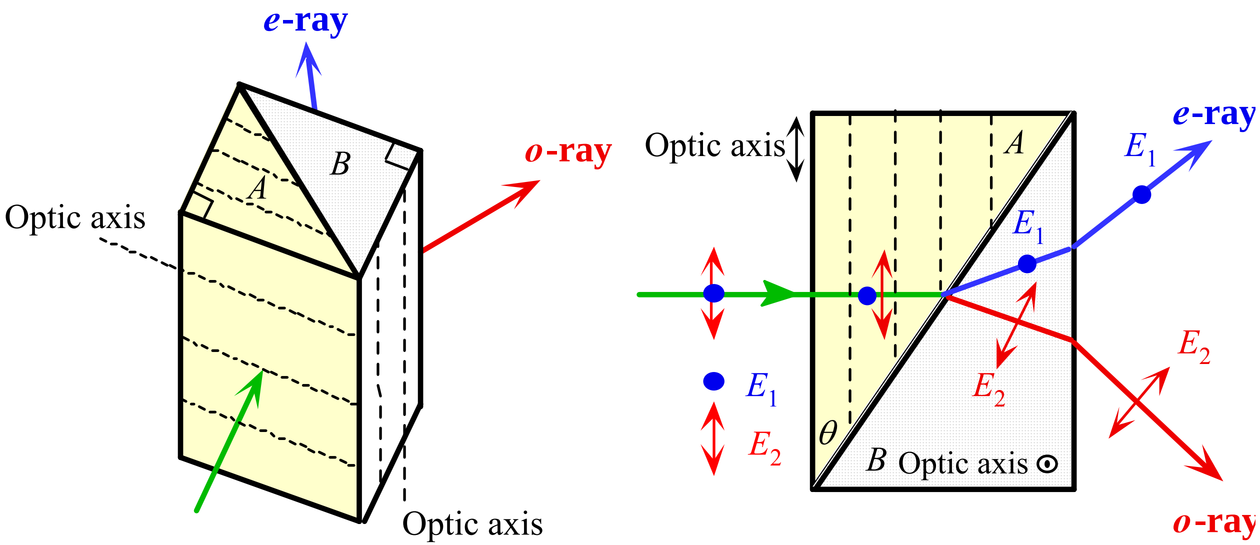
Pozitif tek eksenli kristal
$n_e<n_o$



Negatif tek eksenli kristal
$n_e>n_o$

Çift Kırılma

Çift kırıcı maddeler optoelektronikde sıkça kullanılır. Bu maddeler özellikle ışığı kutuplamada, değişik dalga plakalarında (örneğin yarım dalga, çeyrek dalga plakalarında) ve ışığın modülasyonunda kullanılmaktadır.



The Wollaston prism is a beam polarization splitter. E_1 is orthogonal to the plane of the paper and also to the optic axis of the first prism. E_2 is in the plane of the paper and orthogonal to E_1.