FZM450 Elektro-Optik

3. Hafta

Işığın Elektromanyetik Tanımlanması-2:

Madde Ortamında Elektromanyetik Dalgalar

3. Hafta Ders İçeriği

- Madde içinde Maxwell Denklemleri
- Dielektrik Ortamda Maxwell denklemleri
- Metal Ortamda Maxwell Denklemleri
- Maddenin Optik Sabitleri Arasındaki İlişkler

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga

Maxwell denklemleri

$$\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \right]$$

Boşluk için yukardaki denklemi çözüp ve hem E hemde B alanının dalga denklemini sağladığını göstermiştik

Şimdi bu denklemleri maddesel bir ortam içinde çözmeye çalışalım

Birbirinden farklı iki tür ortamdan bahsedebiliriz. Bunlar;

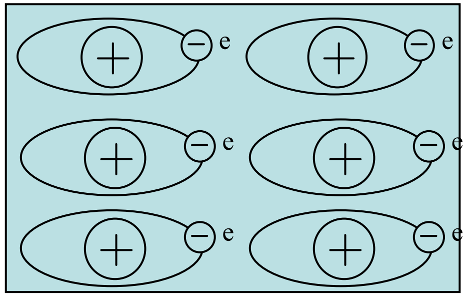
Durum I: J=0 (Dielektrik ortam, veya yalıtkan ortam veya transparent ortam) $\rho_{serbest}=0$

Durum II: J≠0 (İletken ortam veya metalik ortam veya yansıtıcı ortam) $\rho_{serbest}=0$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga

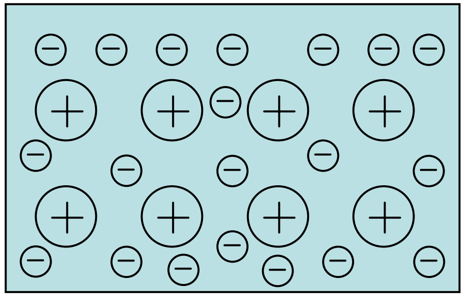
Dielektrik Ortam: J=0 (Dielektrik ortam, veya yalıtkan ortam veya transparent ortam) $\rho_{serbest}=0$

Metalik Ortam: $J\neq 0$ (İletken ortam veya metalik ortam veya yansıtıcı ortam) $\rho_{serbest}=0$



Dielektrik
$\rho=0$, J=0

Net yük yoğunluğu sıfırdır ve serbest dolaşan yük bulunmaz



Metal
$\rho=0$, $J\neq 0$

Net yük yoğunluğu sıfırdır Ancak serbest dolaşan yük(elektron) bulunur

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga

- Maddenin elektrik alan etkisine tepkisinin nasıldır?
- Bu elektrik alan elektromanyetik dalgayı oluşturan elektrik alan bileşeni olduğunda maddenin tepkisi nasıl olur?
- Bu tepkinin frekansa bağlılığı nasıldır?
- Malzemenin elektrik alana tepkisini karakterize eden nicelikler ile maddenin optik sabitleri arasındaki ilişki nasıldır?

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-1

Durum I: J=0 (Dielektrik ortam, veya yalıtkan ortam veya transparent ortam)

$\rho_{serbest}=0$

Dielektrik malzemeleri (SiO_2 gibi) mükemmel yalıtkan olarak düşüneceğiz

$$\nabla . \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

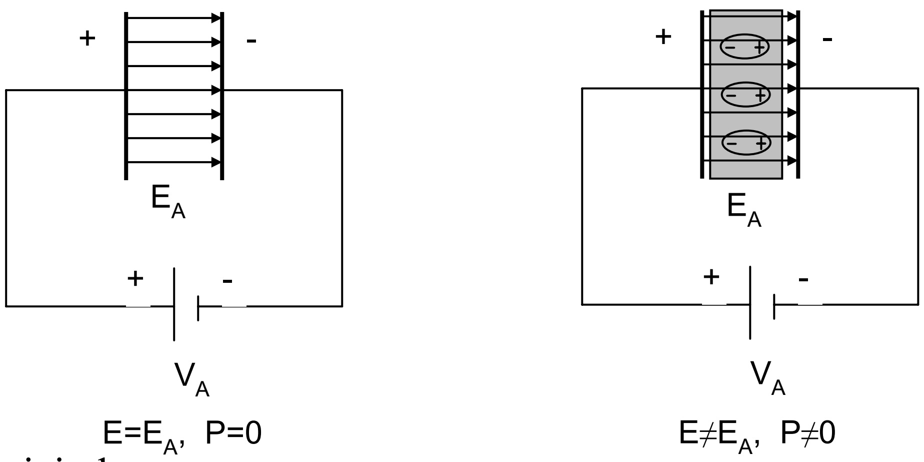
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right]$$

Dielektrik ortam olduğu için E alanını ortamın karakteristiğini yansıtacak şekilde yeniden ifade etmemiz gerekmektedir

Çünkü dış elektrik alan E, ortamdan dolayı değişikliğe uğrayacaktır

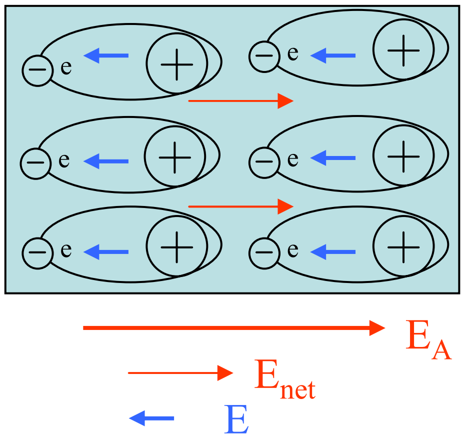
Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-1

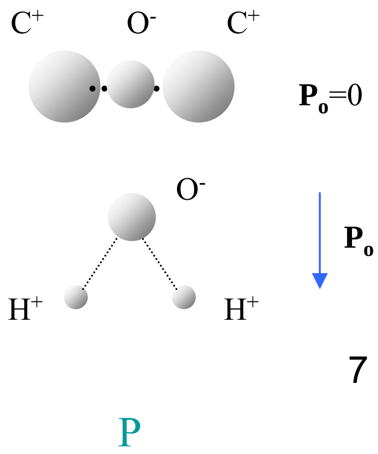
Dış elektrik alanın malzeme üzerindeki toplam etkisi malzemenin Polarizasyonu olarak adlandırılır. Malzemenin elektriksel karekteristiği polarizasyonudur. Bunu ifade edebilmek için kutuplanma vektörü (Polarizasyon Vektörü) kullanırız



Uygulanan dış alan madde içinde:

- İndüksiyon yolu ile elektrik dipoller oluşturur (önceden olmayan dipoller-atomun yük yoğ. değişmesi gibi)
- Var olan dipollerin (dış alan olmadan da var olan dipollerin, örneğin su molekülünde olduğu gibi) alan ile aynı doğrultuya getirilmesini sağlar

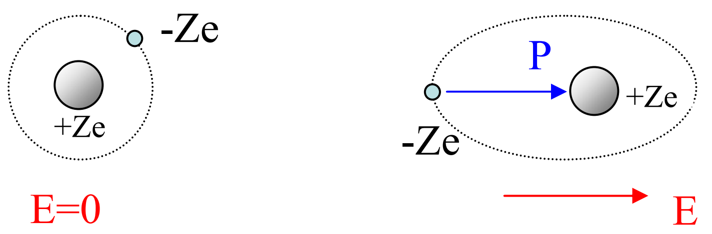


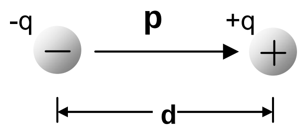


Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-2

Polarizasyona katkı, atom içinde var olan atom ve moleküllerden gelmektedir

Malzemeyi oluşturan bir atomun polarizasyona katkısını düşünelim

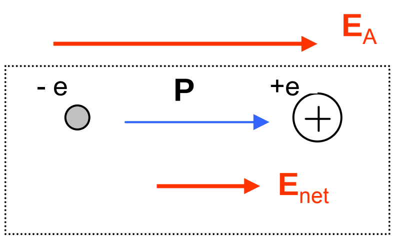




Aralarındaki mesafe d olan iki zıt yükün dipol momenti (**p**)

μ_{atom}=Bir atomun dipol momentidir

$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{atom}}=qd$



Malzeme içindeki net elektrik alan

$\mathbf{E}_{net}=\mathbf{E}_A-\mathbf{E}_{ind}$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-2

Malzemenin elektriksel karekteristiği polarizasyonudur. Bunu ifade edebilmek için kutuplanma vektörü (Polarizasyon Vektörü) kullanırız. Buna göre Polarizasyon vektörü

P= Polarizasyon vektörü

$$\mathbf{P}=\sum \mu / V$$

μ_{atom}=Bir atomun dipol momentidir
V=Hacim

$$\mathbf{P}= \begin{cases} \text{Büyüklüğü } |\mathbf{P}| \text{ dipol moment/hacim} \\ \text{Yönü ise dipol momentin yönündedir} \end{cases}$$

Dipol momenti ise **p**=q**d** şeklindedir. Burada q yük, **d** ise yükler arasındaki uzaklıktır.

Yoğunluğu ρ, atomik kütlesi A olan bir maddenin hacim başına atom sayısı

Polarizasyon vektörü $$|\mathbf{P}| = \left(\frac{N_A}{A}\rho\right)\mu_{atom}$$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-3

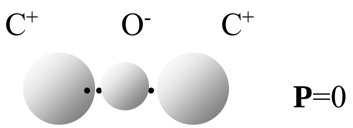
Uygulanan dış elektrik alan ile P arasında nasıl bir ilişki vardır?

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_A)=\mathbf{P}_0+\varepsilon_o\chi^{(1)}\mathbf{E}_A+(\chi^{(2)}.\mathbf{E}_A).\mathbf{E}_A+\ldots$$

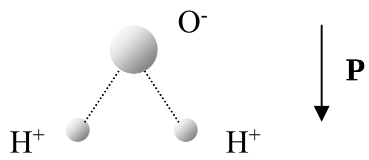
Burada χ elektriksel alınganlıktır (electric susceptibility) ve madenin optik özelliklerini incelemede oldukça önemli bir parametredir

$\chi^{(1)}$= 1. dereceden elektriksel alınganlık
$\chi^{(2)}$= 2. dereceden elektriksel alınganlık (doğrusal olmayan optik parametresi)

Birçok malzeme için $\mathbf{P}_o$ sıfırdır (Dış elektrik alan olmadan var olan polarizasyon, Örneğin H_2O)



Sadece birinci dereceden katkıyı göz önüne alırsak

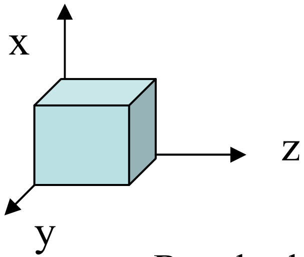


$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_A)=\varepsilon_o\chi^{(1)}\mathbf{E}_A$$

Burada $\chi^{(1)}$ skaler bir niceliktir. Fakat en genel olarak χ matris formundadır. Çünkü malzemeler izotropik ve homojen olmayabilir. İzotropik ortamda (ve kübik kristallerde) ortamdaki yön önemli değildir. **E**, **D** ve **P** vektörleri paralel ve ε, n ve χ skaler niceliklerdir. Böyle bir ortamda elektromanyetik dalganın hızı ilerleme yönünden bağımsız olacaktır.

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-4

İzotropik olmayan malzeme için **P** vektörünü tanımlarsak:



$$P_x=\varepsilon_o\chi_x E_x$$
$$P_y=\varepsilon_o\chi_y E_y$$
$$P_z=\varepsilon_o\chi_z E_z$$

Burada elektriksel alınganlıklar farklı yönler için en genel olarak farklı olabilir $\chi_x \neq \chi_y \neq \chi_z$.

Örneğin izotropik olmayan bir malzemeye y doğrultusunda dış bir elektrik alan uygulandığında, malzemeyi oluşturan atom veya molekülleri E_y doğrultusunda hizaya getirmek E_x doğrultusunda hizaya getirmekten eğer $\chi_x > \chi_y$ ise daha kolaydır

*Elektriksel yerdeğiştirme vektörü **D** (malzeme içindeki alan)*

uygulanan dış elektrik alan E_A, polarizasyondan dolayı madde içinde oluşan elektrik alan E_{ind}, net elektrik alan E_{net} arasındaki ilişki

$$\mathbf{E}_{net}=\mathbf{E}_A-\mathbf{E}_{ind}$$

şeklinde olacaktır. Yani madde içindeki elektrik alan her zaman uygulanan dış alandan daha küçüktür.

E'yi **P** cinsinden yazarsak yerdeğiştirme vektörü **D**'yi

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0(\mathbf{E}_A+\mathbf{P})$$

şeklinde tanımlarız. **P**'yi uygulanan alan cinsinden (1. dereceden katkı alınarak) ifade edersek

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_A)=\varepsilon_0\chi^{(1)}\mathbf{E}_A$$

$\mathbf{E_A}$ cinsinden **D** yerdeğiştirme vektörü

$$\mathbf{D}=\varepsilon_o(\mathbf{E}_A+\chi^{(1)}\mathbf{E}_A) \quad => \quad \mathbf{D}=(\varepsilon_o+\varepsilon_o\chi)\mathbf{E}_A \quad => \quad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}_A$$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-5

$\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1+\chi)$ kısaltması yapılırsa ε niceliğine maddenin elektriksel geçirgenliği

$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}_A$ ε=maddenin geçirgenliği

Burada **D** kutuplanabilen madde içersindeki toplam (net) elektrik alandır
Dolayısı yük yoğunluğunu ve Maxwell denklemini **D** cinsinden şu şekilde yazabiliriz

Elektrik Özellikler
E => D (D=εE)
Gauss yasasında ε_o => ε

Manyetik Özellikler
B => H (B=μH)
μ_o => μ

İki sabit μ ve ε, malzemenin özelliğini belirler. Optikde (yani EM dalgalarda) $\mu \approx \mu_0$ olarak alınabileceği için biz sadece ε'nin özellikleri ile ilgileniriz. Dielektrik ortamda dalga denklemini

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\, \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$\mu \approx \mu_0$ olduğu için

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

yazabiliriz

Madde içinde Elektromanyetik dalganın(ışığın) hızı $v_{ortam} \equiv v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon}} < c$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-Dielektrik Ortam-6

Madde ortamındaki (Dielektrik) EM dalganın(ışığın) hızını boş uzay çözümleri ile karşılaştıralım

Boş uzaydaki EM'nın hızı $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_0}}$ Madde ortamında EM'nın hızı $v_m = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$

Kırılma indisi (n) tanımı

$$n \equiv \frac{c}{v_m} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}\right)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

Kırılma indisi ışığın boşluktaki hızının (c), madde içindeki hızına (v_m) oranıdır

Dielektrik sabiti (κ) tanımı ise:

$$\kappa \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = n^2$$

(κ-ksi okunur)

Gerçekte ε ve κ frekasına bağlıdır ama şimdilik incelemelerimize bunu dahil etmeyeceğiz

Yukarıda bulunan sonuçlar dielektrik ortam için geçerlidir

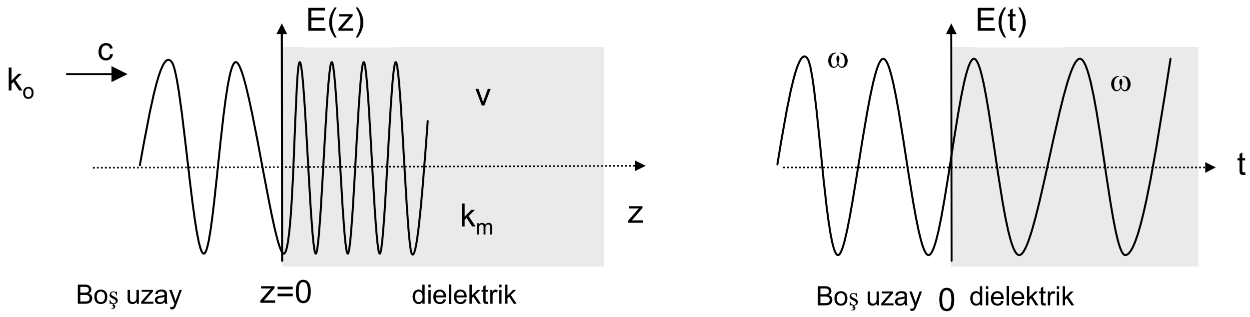
Dielektrik durum için dalga denkleminin çözümleri

$$\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E_o}\mathrm{Sin}(k_m z-\omega t+\phi)$$

$k_m=2\pi/\lambda_m$ (madde içindeki optik dalganın dalga sayısı)

$\omega=2\pi\nu$ (dalganın açısal frekansı, ki boş uzaydaki ile aynıdır)

$v_m=\omega/k_m$ veya $v_m=\nu\lambda_m$ (dalganın madde içindeki yayılma hızı)



Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-İletken Ortam-1

Durum II: İletken Ortam

İletken ortamda $\rho_{serbest}=0$ ve $\mathbf{J}\neq 0$ (iletkenlerde serbest taşıyıcılar oldukça fazladır $>10^{26}$ m^{-3})

Maxwell Denklemleri:

$$\nabla . \boldsymbol{D} = 0$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \left[\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \right]$$

Yukarıdaki Maxwell denklemlerini çözebilmek için ***J*** ile uygulanan elektrik alan **E** arasında bir ilişki türetmemiz gerekmektedir

Eğer işlemlerimizi doğrusal malzemelere, ki bu malzemeler Ohm yasasının geçerli olduğu malzemelerdir, sınırlandırırsak ***J*** ile **E** arasındaki bağıntıyı

$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ (Doğrusal iletken için Ohm yasası) şeklinde yazarız. Burada σ=iletkenliktir ($\rho=1/\sigma$)

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \left[\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma \boldsymbol{E} \right] \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-İletken Ortam-2

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\left[\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma \boldsymbol{E}\right] \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Bu iki denklemi çözmek yerine, dielektrik ortam için bulduğumuz çözümlere yeni terimler ekleyerek iletken ortam için optik sabitleri türetebiliriz

Dielektrik durum için dalga denkleminin çözümleri

$$\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E_o}\mathrm{Sin}(k_m z-\omega t+\phi)$$

$k_m=2\pi/\lambda_m$ (madde içindeki optik dalganın dalga sayısı)
$\omega=2\pi\nu$ (dalganın açısal frekansı, ki boş uzaydaki ile aynıdır)
$v_m=\omega/k_m$ veya $v_m=\nu\lambda_m$ (dalganın madde içindeki yayılma hızı)

Dalga denklemi için üstel gösterim kullanırsak

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_o e^{i(k_m.z-\omega t+\phi)} \qquad \boldsymbol{B}(z,t) = \boldsymbol{B}_o e^{i(k_m.z-\omega t+\phi)} \qquad v_m = \frac{|\boldsymbol{E_o}|}{|\boldsymbol{B_o}|}$$

İletken

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = +i\omega \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_o[\sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon(-i\omega)\boldsymbol{E}]$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_o[\sigma + \varepsilon(-i\omega)]\boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = (-i\omega)\mu_o\left[\frac{\sigma}{(-i\omega)} + \varepsilon\right]\boldsymbol{E}$$

Dielektrik

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = +i\omega \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_o \varepsilon(-i\omega)\boldsymbol{E}$$

Ödev 3.1:

İletken ortamda

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_o \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_o \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

ile verilen diferansiyel dalga denkleminin çözümünün

$$E(z,t) = E_o e^{i\left[(\frac{\omega}{c} nz + i\frac{\omega}{c} Kz) - \omega t + \phi\right]}$$

olduğunu gösterin.

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-İletken Ortam-3

Dielektrik

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_o \varepsilon (-i\omega) \boldsymbol{E}$$

İletken

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = (-i\omega)\mu_o \left[\frac{\sigma}{(-i\omega)} + \varepsilon \right] \boldsymbol{E}$$

Yukardaki iki ortam için $\nabla \times \boldsymbol{B}$ denklemlerini karşılaştırırsak $\boldsymbol{\varepsilon}$ yerine $\hat{\varepsilon}$ gibi dielektrik sabit tanımı yapabiliriz

$$\hat{\varepsilon} \equiv \frac{\sigma}{-i\omega} + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -i\mu_o \hat{\varepsilon} \boldsymbol{E}$$

İletken durumunda yeni dalga denklemi

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \hat{\varepsilon} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

ε iletken durumunda kompleks!

$$-k_m{}^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \hat{\varepsilon} \omega \boldsymbol{E}$$

Elektromanyetik dalganın iletken içinde ilerleme hızı $v = \frac{\omega}{k_m} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \hat{\varepsilon}}}$

Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-İletken Ortam-4

Kompleks ε'nin anlamı nedir? Dielektrik (σ=0) durumunda kırılma indisi

$$n = \frac{c}{v_m} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}} = \sqrt{\kappa}$$

Dielektrik sabiti gerçek iletken durumunda kırılma indisi

Dielektrik sabiti kompleks $$\hat{n} = \frac{c}{v_m} = \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_o}} = \sqrt{\hat{\kappa}}$$

Dolayısı ile en genel durumda n'nin kompleks bir nicelik olduğunu söyleyebiliriz. Peki gerçekte kompleks n ne demektir?

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_o} e^{i(k_m . z - \omega t + \phi)}$$

Dielektrik durumunda $$\frac{\omega}{k_m} = v_m = \frac{c}{n} \Rightarrow k_m = \frac{\omega}{c} n$$

Bunu ilekten durumu için genelleştirirsek $$\hat{n} = n + iK$$

$$k_m = \frac{\omega}{c}\hat{n} \quad \Longrightarrow \quad \hat{k}_m = \frac{\omega}{c}(n + iK)$$

Burada

k_m = Madde içindeki dalga sayısı

K=Maddenin sönüm katsayısı (extinction coefficient of medium) (kırılma indisinin imajiner kısmı)

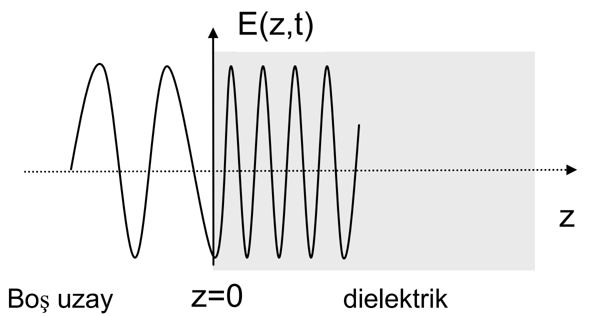
Madde İçinde Elektromanyetik Dalga-İletken Ortam-5

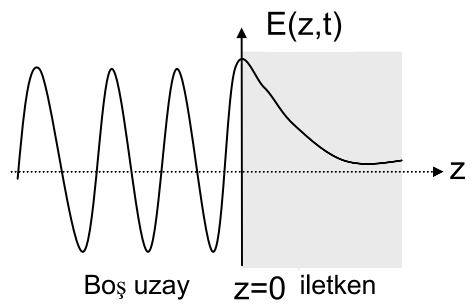
$$\hat{k}_m = \frac{\omega}{c}(n + iK) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(k_m) = \frac{\omega}{c}n, \quad \mathrm{Im}(k_m) = \frac{\omega}{c}K$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \mathbf{E_o} e^{i\left[(\frac{\omega}{c}nz + i\frac{\omega}{c}kz) - \omega t + \phi\right]} \qquad \mathbf{E}(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \mathbf{E_o} e^{-\frac{\omega}{c}Kz} e^{i\left[\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi\right]}$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \left[\mathbf{E_o} e^{-\frac{\omega}{c}Kz}\right] \sin(\frac{\omega}{c}nz - \omega t + \phi)$$

Genlik z değişkenine yani yayılma doğrultusuna bağlı. K>0 için genlikte azalma söz konusudur. Ortamın optik özelliği iki parametre ile verilir bunlar n ve K dır.





Maddenin Optik Sabitleri

$$k_m = \frac{\omega}{c} n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_o} e^{i(\frac{\omega}{c} nz - \omega t + \phi)}$$

$$\hat{k}_m = \frac{\omega}{c}(n + iK) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_o} e^{i\left[(\frac{\omega}{c} nz + i\frac{\omega}{c} kz) - \omega t + \phi\right]}$$

Parlaklık $I = c\varepsilon_o \langle |E|^2 \rangle$

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_o} e^{-\frac{\omega}{c} Kz} e^{i\left[\frac{\omega}{c} nz - \omega t + \phi\right]}$$

E alanını mutlak değerinin zaman ortalamasını alırsak

$$I = I_o e^{-\alpha z}$$

Burada $\alpha = \frac{2\omega}{c} K$ Maddenin soğurma katsayısı (boyutu=1/uzunluk)

Özet

Boş uzaydaki EM'nın hızı $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_0}}$ Madde ortamında EM'nın hızı $v_m = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$

Madde ortamında elektromanyetik dalganın hızı $v_m = c/n$

$$n \equiv \frac{c}{v_m} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}\right)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

Kırılma indisi

kırılma indisi en genel durumda kompleks bir niceliktir

Maddenin optik sabitleri

Gerçek kısmı => n=kırılma indisi,
Sanal kısmı => *K*=yok etme (extinction) katsayısı

Özet

ε_o: Boş uzayın elektrik geçirgenliği
μ_o: Boş uzayın manyetik geçirgenliği

χ Elektrik alınganlık
P Kutuplanma (birim hacim başına dipol momenti)
ε Maddenin elektrik geçirgenliği
$\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_o$ Nispi geçirgenlik
$n=(\varepsilon_r)^{1/2}$ Kırılma indisi

$\kappa=\varepsilon/\varepsilon_o$ Maddenin dielektrik sabiti
$K=\sigma/\varepsilon_o\omega$ Yok etme (Extinction) katsayısı

$$\hat{n} = n + iK$$

Maddenin optik sabitleri

n=Kırılma indisi
K= Yoketme indisi (Extinction katsayısı)