FZM450 Elektro-Optik

5.Hafta

Optik Sabitlerin Frekansa Bağlılığı

© 2008 HSarı

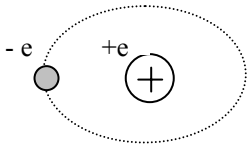
5. Hafta Ders İçeriği

- Değişken elektrik alanda dipol momenti
  - Dielektrik Ortam
  - Metal Ortam

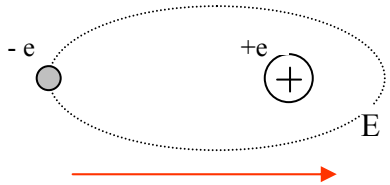
© 2008 HSarı

Dielektrik Sabitinin Frekansa Bağlılığı

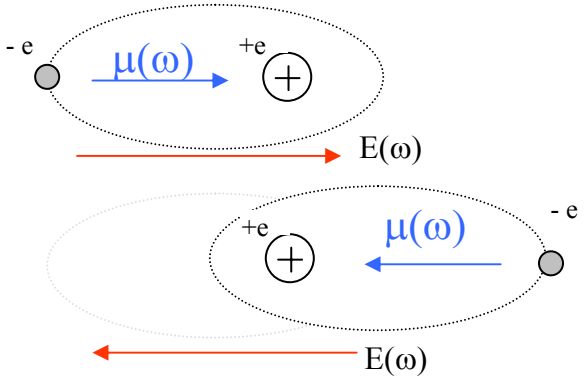
Şimdiye kadar olan incelememizde dış elektrik alanı sabit olarak kabül ettik. Maddenin dielektrik sabiti ε, frekansa (ω) nasıl bağlıdır? ε nin frekansa bağlılığını klasik modeli kullanarak bulmaya çalışalım
Klasik modelde (-) yüklü elektron, (+) yüklü çekirdeğe belli bir denge konumunada bağlıdır.



E=0



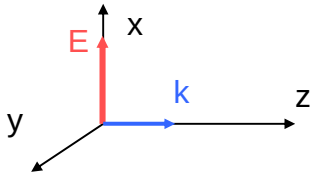
E≠0



E≠0

EM dalganın + z-yönünde ilerlediğini düşünürsek, daha önce bulduğumuz dalga denkleminin çözümü

$$E(z,t) = E_o e^{i(k.z-\omega t+\phi)}$$



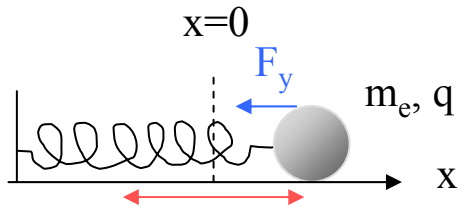
$$E_o = E_o \hat{i}$$

z=0 da $\quad E(0,t) = E_o e^{-i\omega t}$

Elektrik alan uyguladığımızda atomdaki elektronların dağılımını değiştiririz ve elektronu denge konumu etrafında salınım yapmaya zorlarız.

© 2008 HSarı

Atoma bağlı elektronun hareketini denge noktası etrafında harmonik titreşim yapan yay gibi düşünebiliriz



$F_y = -kx$ Yay kuvveti

Bu salınım sırasında hıza bağlı olarak bir kayıp olacaktır. Enerji kaybını

$\gamma(\frac{dx}{dt}) = \gamma\dot{x}$ şeklinde yazabiliriz. Burada γ hızla orantılı kayıp katsayısıdır

Elektronun hareket denklemi $m_e\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_{dış}$ şeklinde yazılabilir.

Burada k, geri çağırıcı kuvvet sabiti, m_e elektronun kütlesi, x elektronun yerdeğiştirmesi ve $F_{dış}$ ise dışardan uygulanan kuvvettir (EM dalga durumunda elektriksel kuvvet yani $F_{dış}=qE$).

Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m_e}\dot{x} + \frac{k}{m_e}x = F_{dış}$$

Bu dif. denklemin çözümü ⇨ x(t)=(homojen kısmının çözümü)+(özel çözüm)

© 2008 HSarı

Homojen kısmının ($F_{dış}$=0 durumunda) çözümü $x_h(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m_e}\dot{x} + \frac{k}{m_e}x = 0$$

çözümün

$$x_h(t) = x_o e^{i\Omega t}$$

şeklinde olduğunu düşünebiliriz (burada Ω elektronun salınm frekansıdır)

Bu frekans değerini bulmaya çalışalım

Çözümü yukardaki homojen denklemde yerine koyarsak

$$(-\Omega^2 + \frac{k}{m_e} + i\Omega\frac{\gamma}{m_e}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\pm} = -\frac{i\gamma}{2m_e} \pm \sqrt{\frac{k}{m_e} - \frac{\gamma^2}{4m_e^2}}$$

Eğer γ=0 => $\Omega_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{k}{m_e}} \equiv \omega_o$ Bu terime rezonans frekansı denir

Homojen kısmın açık çözümü $x_h(t) = x_o e^{i(\pm\sqrt{\frac{k}{m_e} - \frac{\gamma^2}{4m_e}})} e^{-\frac{\gamma}{2m_e}t}$

Burada (γ/2m) ifadesi sönüm katsayısı olarak bilinir.

© 2008 HSarı

Homojen kısmının ($F_{dış} \neq 0$ durumunda) çözümü $x_p(t)$:

$$F_{dıs} = -e\mathbf{E} = -e\mathbf{E_o}e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m_e}\dot{x} + \frac{k}{m_e}x = F_{dıs} = -e\mathbf{E}e^{-i\omega t}$$

Çözümün $x_p(t) = x_o e^{-i\omega t}$ Elektronun da EM dalganın ω frekansı ile salındığını düşünürsek

Özel kısmın çözümü $$x_p(t) = (-\frac{eE_o}{m_e})\frac{1}{(-\omega^2 - i\omega\frac{\gamma}{m_e} + \frac{k}{m_e})}e^{-i\omega t}$$

© 2008 HSarı

$\omega_o \equiv \sqrt{\frac{k}{m_e}}$ kısaltmasını yaparsak özel çözümü $x_p(t) = (\frac{e}{m_e}) \frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)} E(t)$

$x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

t >> T=2π/ω durumunda ⇨ $x_h(t>>T) => 0$

$x_p(t>>T) => \quad x(t >> T) \cong (\frac{e}{m}) \frac{E(t)}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$

x(t), elektronun dış elektrik alandan dolayı (+) yüklü iyona göre göreli yerdeğiştirmesidir.
Bundan yola çıkarak dipol momentini tanımlamaya çalışırsak.
Dipol momenti tanımından, **p**=q**d** atomun dipol momenti μ_{atom}

$\mu_{atom}=|e|x(t)$

Polarizasyon vektörü **P**=(Toplam dipol momenti)/Hacim

$|\mathbf{P}|= \mu_{atom}N$

Burada N birim hacim başına düşen atom sayısıdır. Polarizasyon vektörünü

$\mathbf{P}=\varepsilon_o\chi\mathbf{E}=|e|\boldsymbol{x}(t)N$ şeklinde yazabiliriz

$$\varepsilon_o \chi \mathbf{E}(t) = | e | x(t) N = (\frac{e^2 N}{m_e}) \frac{E(t)}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

$$\chi(\omega) = (\frac{e^2}{\varepsilon_o m} N) \frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

© 2008 HSarı

$$\chi(\omega) = \left(\frac{e^2 N}{\varepsilon_o m_e}\right) \frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

Burada $\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m_e}$ kısaltması yapılırsa (bu terimine "*plazma frekansı*" denir)

Plazma frekansı cinsinden elektriksel alınganlık $\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$

Benzer şekilde maddenin elektriksel geçirgenliğinin (ε) frekansa bağlılığını bulalım

Elektriksel yerdeğiştirme vektörü **D**'nin tanımından $D = \varepsilon E = \varepsilon_o E + P = \varepsilon_o E + \varepsilon_o \chi E = \varepsilon_o (1 + \chi) E$

$$\varepsilon = \varepsilon_o \left[1 + \chi(\omega)\right] \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

Herhangi bir kayıp kompleks ε ifadesine neden olmaktadır!

Frekansa bağlı elektriksel geçirgenlik

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_o^2 - i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \dfrac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \\ \mathrm{Im}\,\hat{\varepsilon}(\omega) = \dfrac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{m_e^2}} \end{cases}$$

© 2008 HSarı

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2 - i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

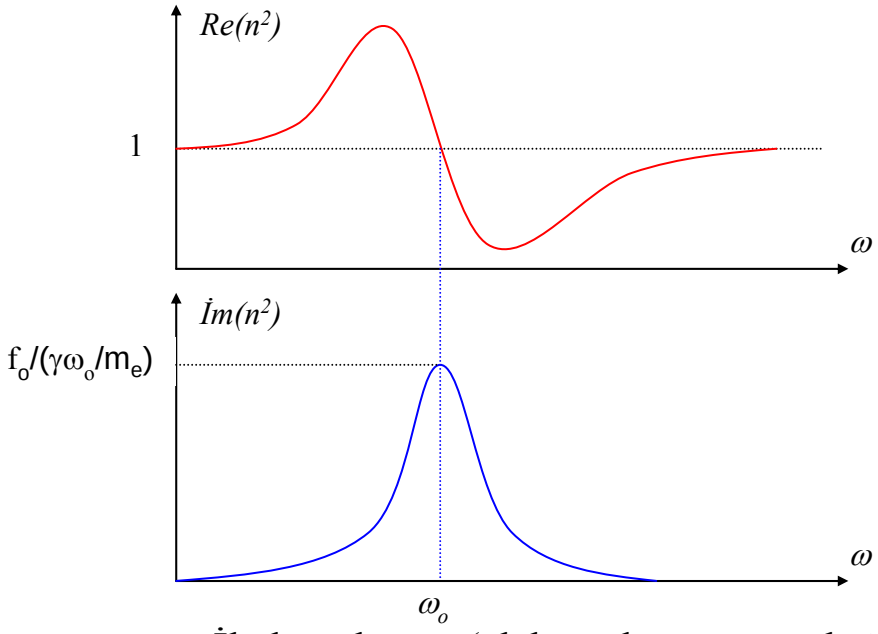
$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \left[\varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right] - i\left[\frac{\varepsilon_o \omega_p^2 \frac{\gamma}{m_e}\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right]$$

$$\hat{n}^2(\omega) = \hat{\varepsilon} = \underbrace{\left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right]}_{} - i\underbrace{\left[\frac{\omega_p^2 \frac{\gamma}{m_e}\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right]}_{}$$

$$\mathrm{Re}\,\hat{n}^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}} \qquad \mathrm{Im}\,\hat{n}^2(\omega) = \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

© 2008 HSarı

Dielektrik Durum (elektronların atoma bağlı olduğu durum) $k \neq 0$, $\omega_o \neq 0$ $\gamma \neq 0$

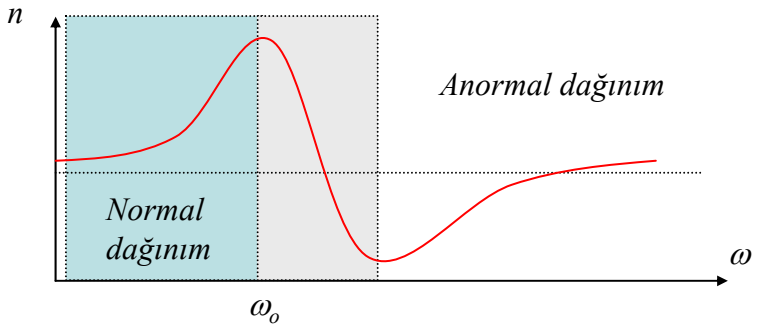


Düşük frekanslarda n statik değerini verir

İletken durum (elektronların atoma bağlı olduğu durum) $k=0$, $\gamma \neq 0$

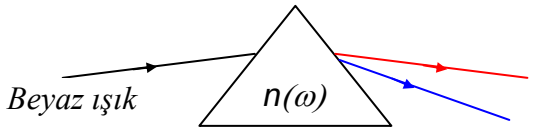
Normal dağınımda kırılma indisi frekans ile artar

$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$



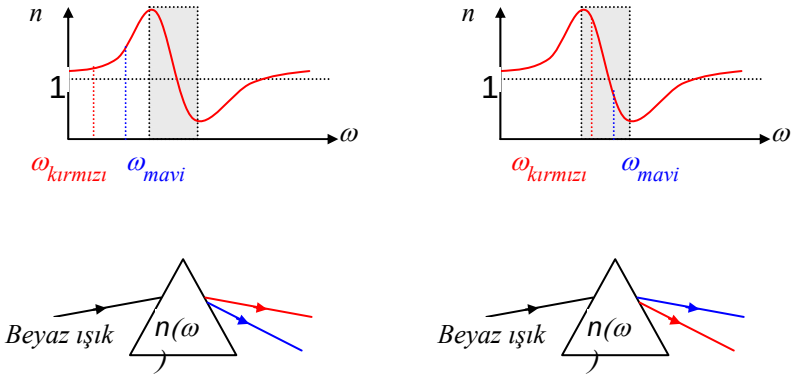
Anormal dağınımda kırılma indisi frekans ile azalır

$$\frac{dn}{d\omega} < 0$$



© 2008 HSarı

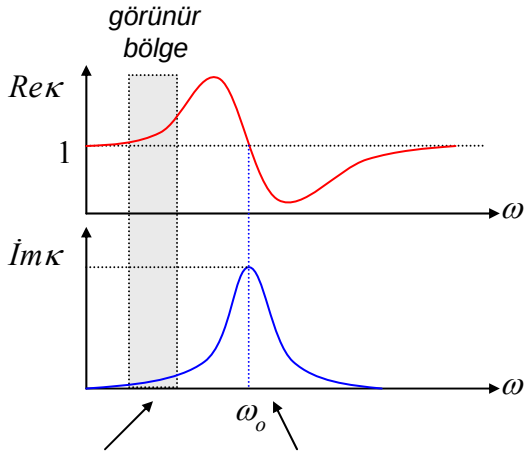
Normal ve anormal bölgeler ne anlama gelmektedir?



Normal dağınım

Anormal dağınım

Bu bilgilerden camın neden görünür bölgede saydam olduğunu açıklayabiliriz
Camın rezonans frekansı görünür bölgenin dışındadır. Dolayısı ile görünür bölgede soğrulma olmaz.

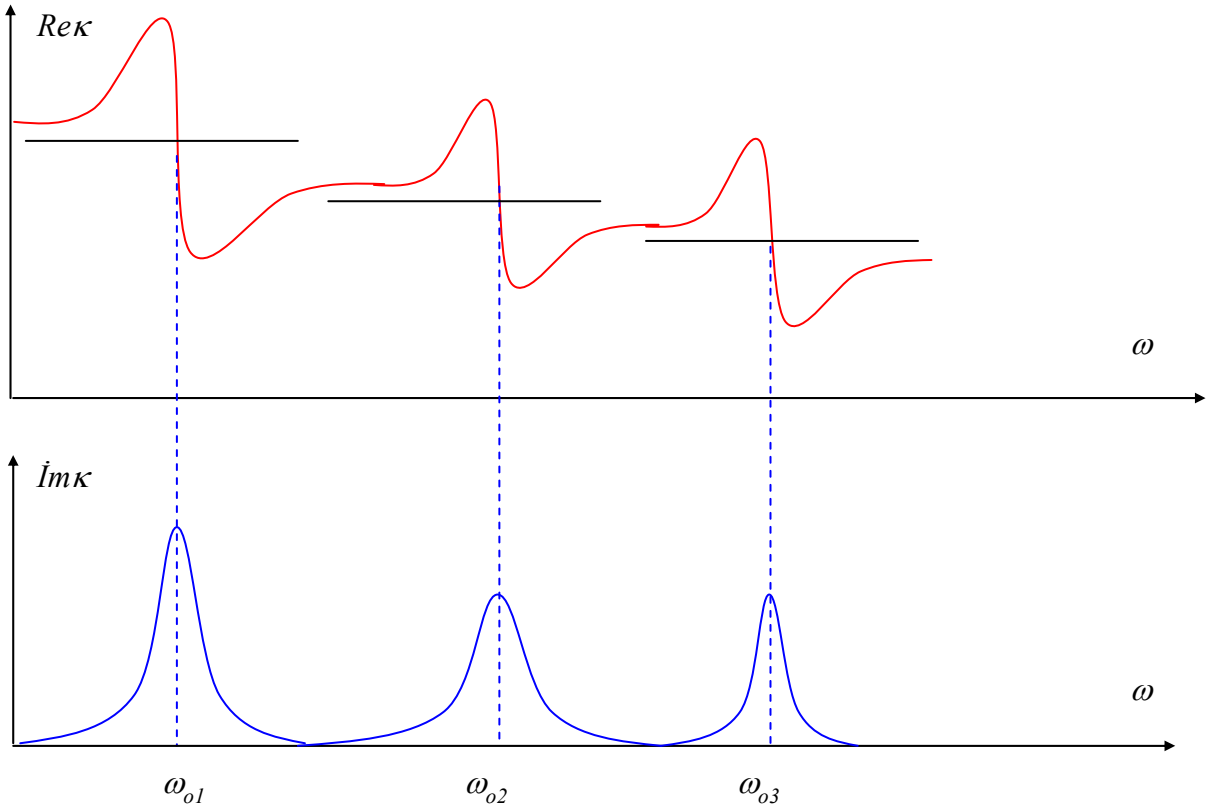


© 2008 HSarı

Tek bir rezonans frekans düşündük. Eğer farklı frekanslarda madde içinde soğurma olursa

$$\hat{\kappa}(\omega) = 1 - \sum_i \frac{\omega_p^2 \left(\omega^2 - \omega_{oj}^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega\right)}{\left(\omega^2 - \omega_{oj}^2\right)^2 + i\frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega^2}$$

Soğurma



© 2008 HSarı

İletkenler için (bağlı elektronlar veya dipoller yerine serbest elektronlar)
yay sabiti $k=0$ $\omega_o=0$ fakat $\gamma\neq 0$ olacağından

$$\hat{\varepsilon}(\omega)=\varepsilon_o-\frac{\varepsilon_o\omega_p^2(\omega^2+i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{\omega^4+\frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

$$\mathrm{Re}\,\hat{\varepsilon}(\omega)=\varepsilon_o-\frac{\varepsilon_o\omega_p^2\omega^2}{\omega^4+\frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}=\varepsilon_o-\frac{\varepsilon_o\omega_p^2}{\omega^2+\frac{\gamma^2}{m_e^2}}$$

$$Im\,\hat{\varepsilon}(\omega)=\frac{\varepsilon_o f_o\frac{\gamma}{m_e}}{\omega^3+\frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega}$$

Frekansa bağlı kompleks kırılma indisi $\hat{n}(\omega)=\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_o}}$

Kompleks dielektrik sabiti (κ)

$$\hat{\kappa}(\omega)=\frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_o}=\hat{n}^2$$

olduğu hatırlanırsa

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}\hat{\kappa}=n^2=1-\dfrac{f_o}{\omega^2+\frac{\gamma^2}{m_e^2}}\\[2ex] \dot{I}m\hat{\kappa}=\dot{I}m(n^2)=\dfrac{\varepsilon_o f_o\omega(\frac{\gamma}{m_e})}{\omega^4+\frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega^2}=\dfrac{f_o(\frac{\gamma}{m_e})}{\omega^3+\frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega}\end{cases}$$

Burada $f_o\equiv\omega_p^2$ kısaltması yapıldı

© 2008 HSarı

İletkenler için (bağlı elektronlar veya dipoller yerine serbest elektronlar) yay sabiti k=0 ω_o=0 fakat $\gamma \neq 0$

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_o^2 - i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}} \quad \xrightarrow{\omega_o=0} \quad \hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 (\omega^2 - i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{\omega^4 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \left[\varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o \omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right] - i\left[\frac{\varepsilon_o \omega_p^2 \frac{\gamma}{m_e}}{\omega^4 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}\right]$$

$$\hat{\kappa}(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_o} = \hat{n}^2$$

$$\mathrm{Re}\,\hat{n}^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}} \qquad \mathrm{Im}\,\hat{n}^2(\omega) = -\frac{\omega_p^2 (\frac{\gamma^2}{m_e})}{\omega^3 + \frac{\gamma^2\omega}{m_e^2}}$$

$$f_o \equiv \omega_p^2$$

$$\mathrm{Re}(n^2(\omega)) = 1 + \frac{f_o}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}} \qquad \dot{I}m(n^2(\omega)) = \frac{f_o (\frac{\gamma}{m_e})}{\omega^3 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega}$$

© 2008 HSarı

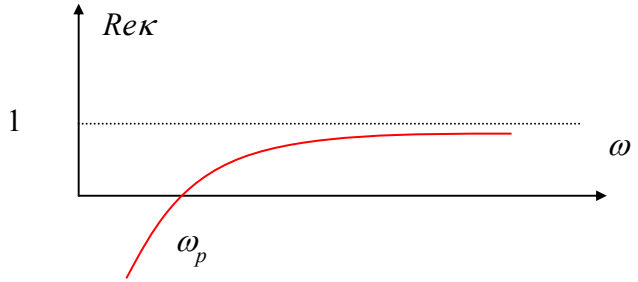
Elektriksel geçirgenliğin gerçek ve imajiner kısmı

$$\mathrm{Re}\,\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o \left[1 - \frac{f_o}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}} \right]$$

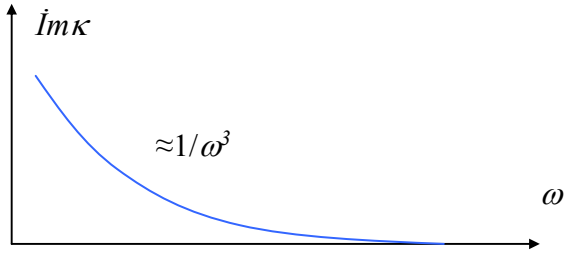
$$\dot{I}m\hat{\varepsilon}(\omega) = \frac{\varepsilon_o f_o \left(\frac{\gamma}{m_e}\right)}{\omega^3 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}}$$

Dielektrik sabitini κ'yı yazarsak

$$\mathrm{Re}\,\hat{\kappa} = n^2 = 1 - \frac{f_o}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}}$$



$$\mathrm{Im}\,\hat{\kappa}(\omega) = \mathrm{Im}\,n^2 = \frac{f_o \frac{\gamma}{m_e}}{\omega^3 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}\omega}$$



© 2008 HSarı

EM dalganın frekansının (ω) plazma frekansına (ω_p) eşit olduğu duruma bakalım $\omega=\omega_p$

$$0 = 1 - \frac{f_o}{\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{m_e^2}}$$

$\omega_p >> \gamma/m_e$ durumunda $\Rightarrow$ $0 \approx 1 - \frac{f_o}{\omega_p^2} \Rightarrow \omega_p^2 = f_o$

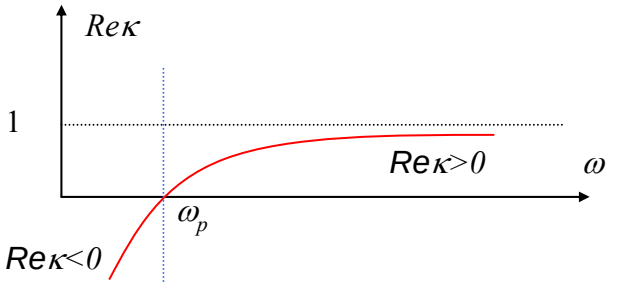
$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_o m_e}}$$ N= Serbest elektron yoğunluğu (birim hacım başına)

Tipik plazma frekansının değeri ne mertebededir?

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m_e} \cong \frac{(10^{23})(10^{-19})^2}{(10^{-10})(10^{-31})} \cong 10^{26} \qquad \omega_p \cong 10^{13}$$

Görünür bölge frekansı ω=10^{14}-10^{15} Hz, dolayısı ile plazma frekansı görünür bölgenin altındadır

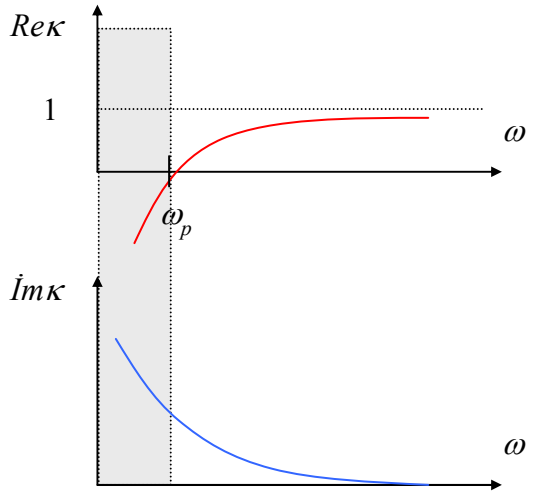
κ'nın gerçek kısmının sıfır olduğu duruma bakalım



© 2008 HSarı

Eğer atmosfere radyo frekansı plazma frekansına eşit bir elektromanyetik dalga gönderilirse ne olur?

$$n \cong \sqrt{\mathrm{Re}\,\hat{\kappa}}$$



Yansıtma katsayısına bakalım
(yansıtma katsayısı R'yi
n cinsinden yazarsak)

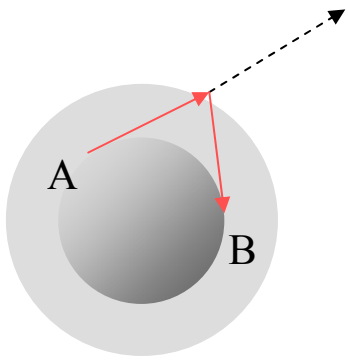
$$R = \left|\frac{n-1}{n+1}\right|^2$$

n=iα tümüyle kompleks (Reκ < 0)
Yansıtma katsayısını kırılma indisi cinsinden yazarsak

$$R = \left|\frac{i\alpha - 1}{i\alpha + 1}\right|^2 = \left|\frac{(-1)(1-i\alpha)}{1+i\alpha}\right|^2 = (1)\left|\frac{1-i\alpha}{1+i\alpha}\right|^2$$

R=1 yansıtma katsayısı 1, dalganın hepsi yansıyacak

$$\left|\frac{z}{z^*}\right|^2 = 1$$

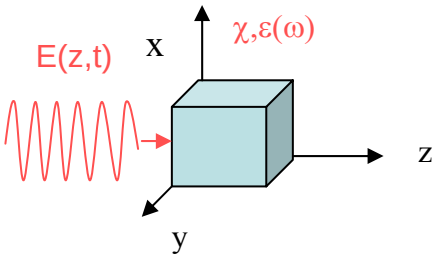


Dünya üzerindeki A ve B noktaları arasındaki iletişim için kullanılacak EM dalganın frekansı ω_p'nin altında olmalıdır

C noktası için ise ω_p'nin üstünde olmalıdır

© 2008 HSarı

Özet

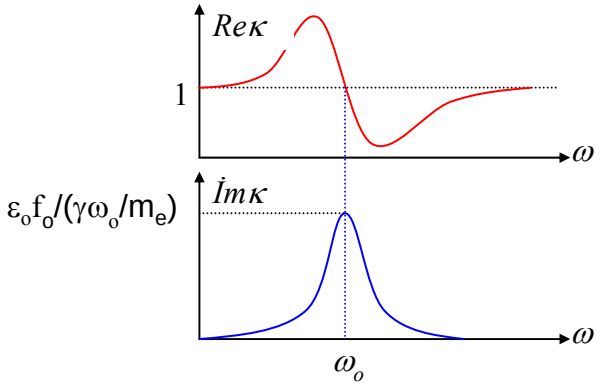


$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_o\left[1 + \chi(\omega)\right] \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon_o - \frac{\varepsilon_o\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}$$

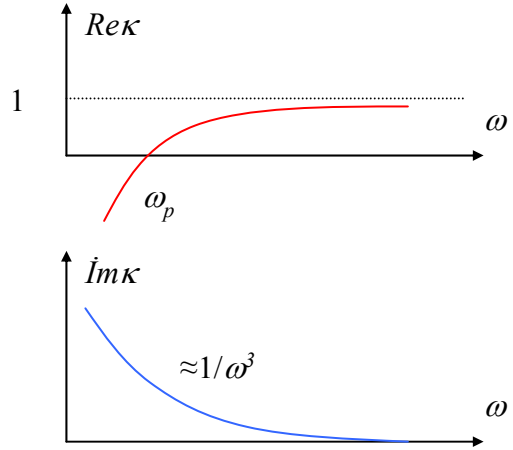
Dielektrik durumunda

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o - \frac{\varepsilon_o\omega_p^2(\omega^2 - \omega_o^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$



İletken durumunda

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_o - \frac{\varepsilon_o\omega_p^2(\omega^2 + i\frac{\gamma}{m_e}\omega)}{\omega^4 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m_e^2}}$$



© 2008 HSarı