LİMİT VE SÜREKLİLİK

LİMİT

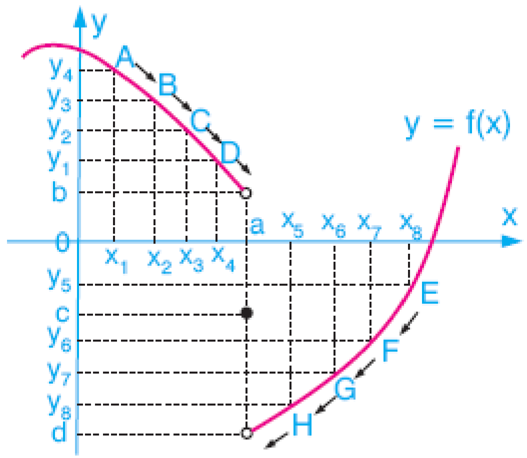
A. SOLDAN YAKLAŞMA, SAĞDAN YAKLAŞMA

x değişkeni a ya, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma denir ve $x \to a^-$ biçiminde gösterilir.

x değişkeni a ya, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ biçiminde gösterilir.

B. LİMİT KAVRAMI

Limit kavramını bir fonksiyonun grafiği üzerinde açıklayalım:



Grafiği verilen y = f(x) fonksiyonu için, apsisleri; x = a nın solunda yer alan ve giderek a ya yaklaşan $A(x_1, y_4)$, $B(x_2, y_3)$, $C(x_3, y_2)$, $D(x_4, y_1)$, … noktalarını göz önüne alalım:
Bu noktaların apsisleri olan x_1, x_2, x_3, x_4, … giderek a ya yaklaşırken, ordinatları $f(x_1) = y_4$, $f(x_2) = y_3$, $f(x_3) = y_2$, $f(x_4) = y_1$, … giderek b ye yaklaşır.
Bu durumu; x, a ya soldan yaklaşıyorken f(x) b ye yaklaşır şeklinde ifade edebiliriz. Bu durumda,

f(x) in x = a daki soldan limiti b dir denir. Ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdakine benzer şekilde, apsisleri x = a nın sağında yer alan ve giderek a ya yaklaşan

$E(x_8, y_5)$, $F(x_7, y_6)$, $G(x_6, y_7)$, $H(x_5, y_8)$, … noktalarını göz önüne alalım.
Bu noktaların apsisleri olan x_8, x_7 , x_6 , x_5 , … giderek a ya yaklaşırken, ordinatlar $f(x_8) = y_5$, $f(x_7) = y_6$, $f(x_6) = y_7$, $f(x_5) = y_8$, … giderek d ye yaklaşır.
Bu durumu “x, a ya sağdan yaklaşıyorken f(x) d ye yaklaşır.” şeklinde ifade edebiliriz.

Bu durumda; f(x) in x = a daki sağdan limiti d dir denir. Ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = d$$

biçiminde gösterilir.

KURAL:

f(x) fonksiyonunun x = a daki soldan limiti sağdan limitine eşit ise fonksiyonun x = a da limiti vardır ve x in a noktasındaki limiti L ise,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir. x = a daki sağ limit ve sol limit değeri, fonksiyonun x = a daki limitidir.

f(x) fonksiyonunun x = a daki soldan limiti sağdan limitine eşit değil ise fonksiyonun x = a da limiti yoktur.

f ve g , x = a da limitleri olan iki fonksiyon olsun.

1. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

   $$\lim_{x \to a} (c) = c$$

2. $$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \pm \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

3. $$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

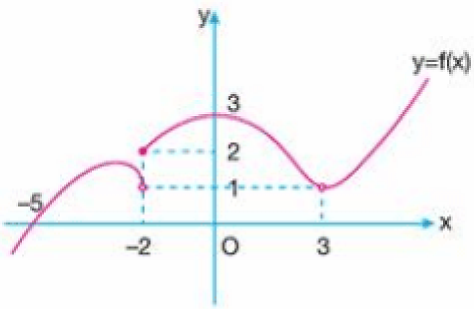
4. $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere,

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

5. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

   $$\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Örnek:



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ ve $x = 3$ değerleri için limiti olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:

x değişkeni -2 ye soldan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 1 e yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$ olur.

x değişkeni -2 ye sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 2 ye yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$ olur.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasında limiti yoktur.

x değişkeni 3 e soldan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 1 e yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$ olur.

x değişkeni 3 e sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 1 e yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti vardır ve bu limitin değeri 1 dir. Yani $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$ bulunur.

Örnek:

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(2^x + \frac{1}{x}\right)$ değeri nedir?

Çözüm:

$$\lim_{x \to \infty} \left(2^x + \frac{1}{x}\right) = 2^{\infty} + \frac{1}{\infty}$$

$$= \infty + 0$$

$$= \infty \text{ bulunur.}$$