

SÜREKLİLİK

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ ise,}$$

$f(x)$ fonksiyonu apsisi $x = a$ olan noktada süreklidir.

- $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da sürekli ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ dır.}$$

- $f(x)$ fonksiyonu apsisi $x = a$ olan noktada sürekli değil ise, süreksizdir.

KURALLAR:

1. Bir fonksiyon bir noktada tanımsız ise, o noktada süreksizdir.
2. Bir fonksiyon bir noktada limitsiz ise, o noktada süreksizdir.
3. Bir fonksiyon bir noktada tanımlı ve limitli ancak, tanım değeri limit değerinden farklı ise, bu noktada süreksizdir.

Örnek:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & , x < 1 \\ 2 & , x = 1 \\ x^2 - 1 & , x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu kaç farklı x tam sayı değeri için süreksizdir?

Çözüm:

I. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktaları inceleyelim.

$x < 1$ koşuluyla $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ rasyonel fonksiyonu

paydayı sıfır yapan değer için tanımsızdır.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 < 1$ olduğundan,

$x = -1$ noktasında fonksiyon süreksizdir.

II. Fonksiyonun kritik noktasına bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0, \quad f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \text{ olduğundan,}$$

$x = 1$ noktasında süreksizdir.

Dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ ve $x = 1$ olmak üzere, 2 tam sayı değeri için süreksizdir.

Örnek:

$$f(x) = \frac{8x + 5}{x^2 + mx + 1}$$

fonksiyonu gerçekte sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre, m nin değer aralığını bulunuz.

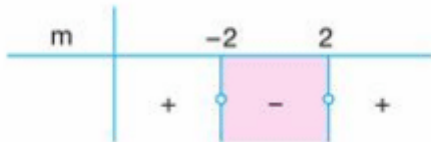
Çözüm:

$f(x)$ fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ iken sürekli olması için paydasını sıfır yapan değer olmamalıdır. Yani,

$x^2 + mx + 1 = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olmalıdır.

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (m - 2) \cdot (m + 2) < 0$$



Buna göre, $-2 < m < 2$ olmalıdır.