

# TÜREV

## TÜREV ALMA KURALLARI

### 1. $x^n$ nin Türevi

$n \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$f(x) = x^n$  ise  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$  dir.

### 2. $c$ Sabit Sayısının Türevi

$c \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$f(x) = c$  ise  $f'(x) = 0$  dir.

### 3. $c \cdot f(x)$ in Türevi

$c \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot [f(x)]' = c \cdot f'(x)$  tir.

### 4. Toplamın Türevi

$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

### 5. Farkın Türevi

$[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

### 6. Çarpımın Türevi

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

### 7. Bölümün Türevi

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

### 8. Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  verilsin.  $a \in A$ ,  $f(a) \neq 0$  olmak üzere,

$$y = f(x) = \begin{cases} -f(x), & f(a) < 0 \text{ ise} \\ f(x), & f(a) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$f(a) = 0$  ise fonksiyonun bu noktada türevi olabilir ya da olmayabilir. Bunu araştırmak için fonksiyonun sağdan ve soldan türevlerine bakılır. Sağdan ve soldan türevler eşit ise fonksiyon bu noktada türevlidir. Aksi hâlde türevli değildir.

### 9. İşaret Fonksiyonunun Türevi

$$f(x) = \text{sgn}[g(x)] \text{ ise } f'(x_0) = \begin{cases} 0, & g(x_0) \neq 0 \\ \text{Yoktur}, & g(x_0) = 0 \end{cases}$$

### 10. Tam Değer Fonksiyonunun Türevi

$$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket \text{ ise } f'(x_0) = \begin{cases} 0, & g(x_0) \notin \mathbb{Z} \\ \text{Yoktur}, & g(x_0) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

### 11. Bileşke Fonksiyonun Türevi

$$[(g \circ f)(x)]' = \{g[f(x)]\}' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

### 12. Ters Fonksiyonların Türevi

$f : A \rightarrow B$ , birebir ve örten bir fonksiyon ise  $f(x)$  in tersi olan  $f^{-1}(x)$  fonksiyonu bulunur. Sonra türev alınır. Bunun zor olduğu durumlarda ters fonksiyonun türevi şöyle alınır.

$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$  olmak üzere,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ olur.}$$

**Örnek:**

$f(x) = x^3 + 2x - 1$  olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x}$  in değeri nedir?

- A) -5 B) -3 C) 3 D) 5 E) 6

**Çözüm:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -f'(1) \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(1) = 3 + 2 = 5$$

Buna göre;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x} = -f'(1) = -5 \text{ dir.}$$

**YANIT "A"**

**Örnek:**

$f(x) = \frac{x^2 + kx}{2x + 1}$  fonksiyonunun  $x = -1$  deki türevi  $y = 4x - 3$  doğrusunun eğimine eşit ise **k kaçtır?**

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**Çözüm:**

$y = 4x - 3$  doğrusunun eğimi  $m = 4$  tür.

$$f'(x) = \frac{(2x+k)(2x+1) - 2 \cdot (x^2+kx)}{(2x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \frac{(2 \cdot (-1) + k)(2 \cdot (-1) + 1) - 2 \cdot ((-1)^2 + k(-1))}{[2 \cdot (-1) + 1]^2} \\ &= \frac{(-2+k)(-1) - 2(1-k)}{(-1)^2} = 4 \end{aligned}$$

$$2 - k - 2 + 2k = 4 \Rightarrow k = 4 \text{ tür.}$$

**YANIT "C"**

**Örnek:**

$f(x) = (x^2 + 1)^3 \cdot (\sqrt{x} + x)^2$  fonksiyonunun  $x = 1$  deki türevinin değeri kaçtır?

- A) 36 B) 48 C) 72 D) 144 E) 168

**Çözüm:**

$$f'(x) = 3 \cdot 2x(x^2 + 1)^2 \cdot (\sqrt{x} + x)^2 + 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) \cdot (\sqrt{x} + x) \cdot (x^2 + 1)^3$$

$$f'(1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot 2 \cdot 2^3 = 96 + 48 = 144$$

**YANIT "D"**

**Örnek:**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x - 14$  fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(x)$  fonksiyonunun  $x = 2$  deki türevinin değeri kaçtır?

- A)  $\frac{1}{12}$  B)  $\frac{1}{15}$  C)  $\frac{1}{16}$  D)  $\frac{1}{18}$  E)  $\frac{1}{20}$

**Çözüm:**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ye  $f(x) = 3x^2 - 6x + 18$  ve örten fonksiyondur.

$f(1) = 3 - 6 + 18 = 15$  olduğundan  $f^{-1}(15) = 1$  dir.

Buna göre,

$$\left. \frac{df^{-1}(x)}{dx} \right|_{x=15} = \frac{1}{f'(f^{-1}(15))} = \frac{1}{f'(1)} \text{ dir.}$$

$f(x) = 3x^2 - 6x + 18 \Rightarrow f'(x) = 6x - 6 \Rightarrow f'(1) = 6 - 6 = 0$  dir.

$$\left. \frac{df^{-1}(x)}{dx} \right|_{x=15} = \frac{1}{0} \text{ dir.}$$

**YANIT "B"**