İNTEGRAL

$f : [a, b] \rightarrow R$, $F : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı ve türevlenebilir iki fonksiyon olsun.
Her x Є (a, b) için, F'(x) = f(x) ise F(x) fonksiyonuna f(x) fonksiyonunun ilkeli veya belirsiz integrali denir. Bunu, C Є R olmak üzere,

$$F'(x) = f(x) \longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Biçiminde gösterilir. $\int f(x)\,dx$ ifadesini, "integral f(x) dx" diye okuruz.

Kısaca, $\int f(x)\,dx$ demek, türevi f(x) olan F(x) fonksiyonunu bulmak demektir.
$\int f(x)\,dx = F(x)+C$ ifadesindeki;

- f(x) fonksiyonuna integrand,
- F(x) fonksiyonunun bulunması işlemine integrasyon işlemi,
- C reel sayısına da integrasyon sabiti denir. Bir fonksiyonda, sabit terimin türevi sıfır olduğundan, integral alınırken bu sabit terimi bilemeyiz.
- $\int f(x)\,dx$ ifadesindeki dx ise, integrasyonyn değişkeninin x olduğunu belirtir.

- Bir fonksiyonun diferansiyelinin integrali, bu fonksiyona sabit eklenerek bulunur.
  $\int d(f(x)) = f(x)+C$ dir.

- Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının integrali, o fonksiyonun integralinin sabitle çarpımına eşittir.

Yani, integral içindeki sabit çarpan, integral dışına alınabilir.

Her a Є R için, $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$

- İki fonksiyonun veya farkının integrali, bu fonksiyonların integrallerinin toplamına veya farkına eşittir.

$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,
$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ tir.

LOGARİTMİK VE ÜSTEL İNTEGRAL ALMA KURALLARI:

1. $\int \{f'(x) / f(x) = \ln |f(x)| + C$
2. $\int e^a \cdot f'(x)\,dx = e^a + C$ (a = f(x))
3. $\int e^a \cdot f'(x)\,dx = \{e^a / \ln e\} + C$ (a = f(x))

Bu eşitliklerin, sağ tarafındaki ifadelerin türevlari alındığında, integrali alınacak ifade elde edilir.

BAZI TRİGONOMETRİK İFADELERİN İNTEGRALLERİ

1. $\int \sin(f(x))\,.\,f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$

2. $\int \cos(f(x))\,.\,f'(x)\,dx = \sin f(x) + C$

3. $\int \{f'(x) / \cos^2 f(x)\}\,dx = \tan f(x) + C$

4. $\int \{f'(x) / \sin^2 f(x)\}\,dx = -\cot f(x) + C$

5. $\int \sin(ax + b)\,dx = (-1 / a) \cos(ax + b) + C \qquad (a = 0)$

6. $\int \cos(ax + b)\,dx = (1 / a) \sin(ax + b) + C \qquad (a = 0)$

7. $\int \{dx / \cos^2(ax + b)\,dx = (1 / a) \tan(ax + b) + C \quad (a = 0)$

8. $\int \{dx / \sin^2(ax + b)\,dx = (-1 / a) \cot(ax + b) + C \quad (a = 0)$

9. $\int \cot(ax + b)\,dx = \int \{\cos(ax + b) / \sin(ax + b)\,dx = (1 / a) \ln|\sin(ax + b)| + C$

Yukarıdaki eşitliklerde, sağ taraftaki fonksiyonların türevlvri alındığında, integrali alınan fonksiyon elde edilir.

Örnek:

$\int f^2(3x)\,d(f(3x))$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) $f(3x) + C$ B) $\frac{1}{3} f(3x) + C$

C) $\frac{1}{3} f^2(3x) + C$ D) $\frac{1}{3} f^3(3x) + C$

E) $f^3(3x) + C$

Çözüm:

$\int f^2(3x)\,d(f(3x)) = \frac{1}{3} f^3(3x) + C$ bulunur.

YANIT "D

Örnek:

$\int_{-1}^{2} (\llbracket x \rrbracket + \mathrm{sgn}(x))\,dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm:

$$\int_{-1}^{2}\left([\![x]\!]+\operatorname{sgn}(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-1+(-1)\right)dx+\int_{0}^{1}(0+1)dx+\int_{1}^{2}(1+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}-2dx+\int_{0}^{1}dx+\int_{1}^{2}2dx$$

$$=-2x\Big]_{-1}^{0}+x\Big]_{0}^{1}+2x\Big]_{1}^{2}$$

$$=-2(0-(-1))+(1-0)+2(2-1)$$

$$=-2+1+2$$

$$=1$$

YANIT "E",

Örnek:

$f(x)=x+1$ ise $\int_{0}^{3}2f(x)d\left(f(x)\right)$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

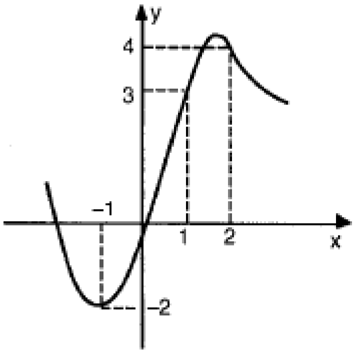
Çözüm:

$$\int_{0}^{3}2f(x)d\left(f(x)\right)=f^{2}(x)\Big]_{0}^{3}=f^{2}(3)-f^{2}(0)$$

$$=(3+1)^{2}-(0+1)^{2}=15$$

YANIT "D

Örnek:



$f : R \to R$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

$\int_{-1}^{2} \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} dx$ ifadesi neye eşittir?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Çözüm:

$$\int_{-1}^{2} \frac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_{-1}^{2} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{f(x)}\right) dx \text{ bulunur.}$$

$$= \frac{x^3}{f(x)}\Big]_{-1}^{2}$$

(Şekilden $f(2) = 4$ ve $f(-1) = -2$ bulunur. Dolayısıyla)

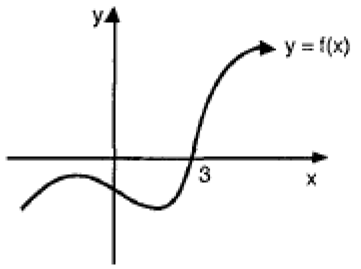
$$= \frac{2^3}{f(2)} - \frac{(-1)^3}{f(-1)}$$

$$= \frac{8}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

YANIT "C"

Örnek:



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. Buna göre,

$\int_{-1}^{4} x\,\mathrm{sgn}(f(x))dx$ **integralini hesaplayınız.**

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

Çözüm:

$$\mathrm{sgn}(f(x)) = \begin{cases} -1 & ; \quad x<3 \quad \text{ise} \\ 0 & ; \quad x=3 \quad \text{ise} \\ 1 & ; \quad x>3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{4} x\,\mathrm{sgn}(f(x)) = \int_{-1}^{3} x(-1)dx + \int_{3}^{4} x(1)dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{3} + \frac{x^2}{2}\Big]_{3}^{4}$$

$$= -\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right)$$

$$= -4 + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

YANIT "D