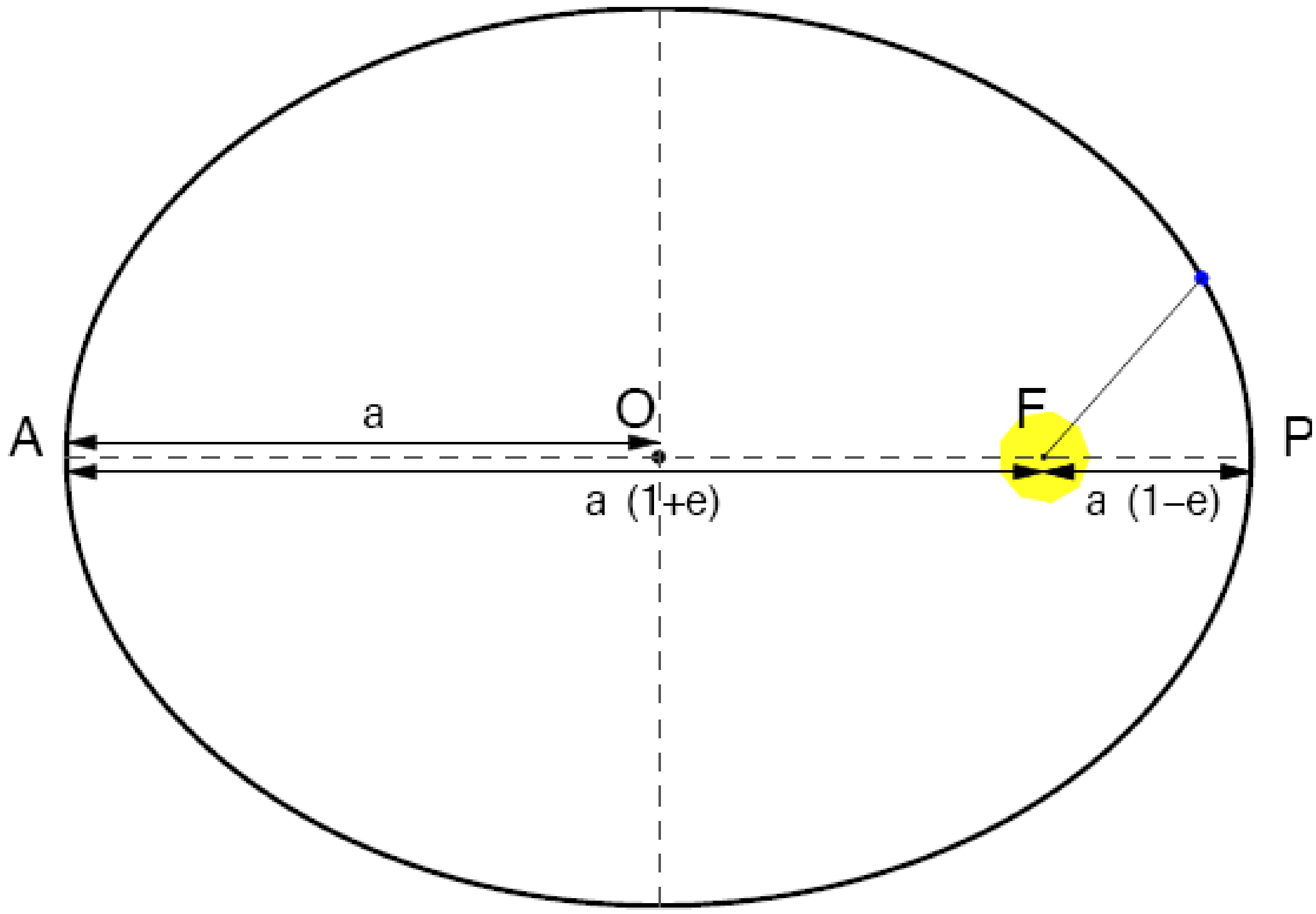
AST413
Gezegen Sistemleri ve Oluşumu

Ders 3 : Kepler Denklemlerinden Ötegezegen Keşiflerine

Kepler 1. Yasa (1609)

Gezegenler, Güneş'in etrafında eliptik yörüngeler üzerinde dolanırlar!

Aphel:
enöte



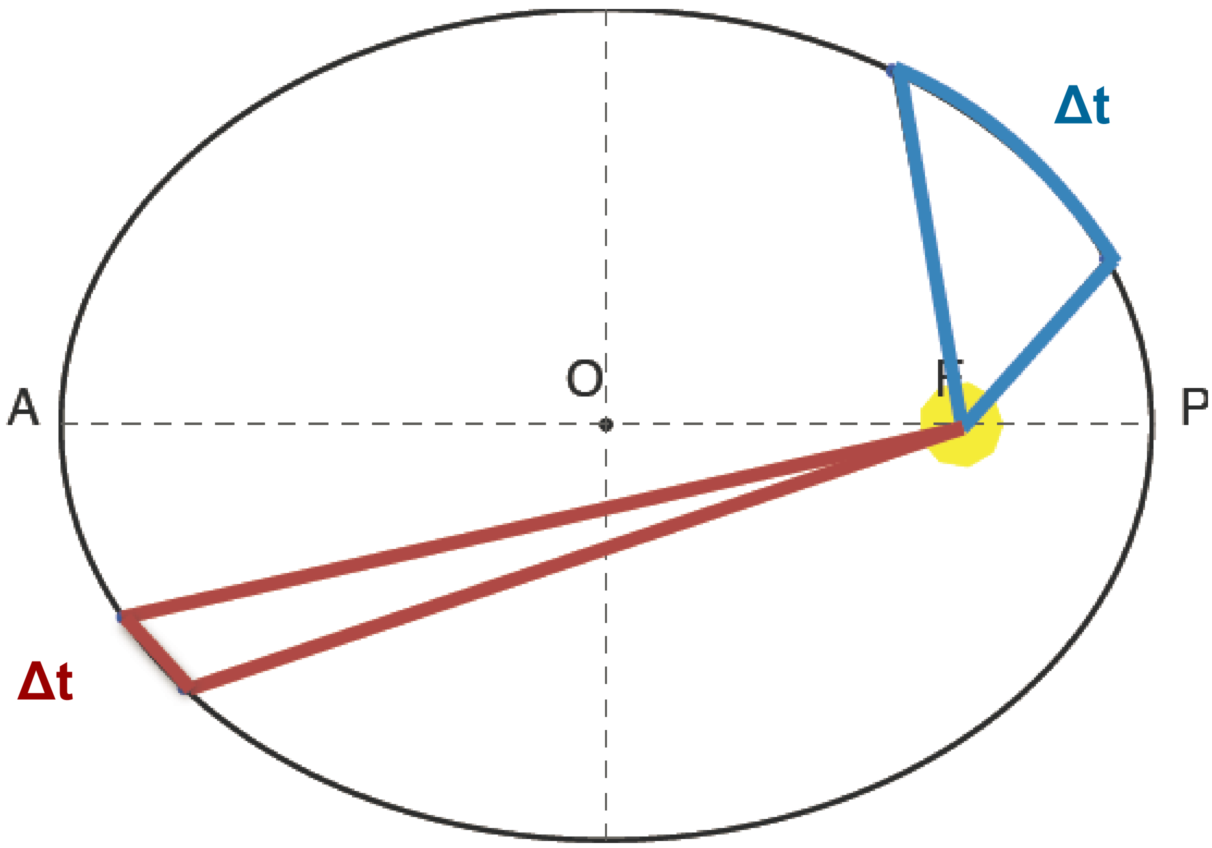
Perihel:
enberi

Galiel'nin teleskobu ilk kez gökyüzüne çevirdiği tarih: 1609

Kepler'in kullandığı gözlemler Galilei'nin teleskopla yaptıkları değil, Tycho Brache'nin teleskopsuz yaptığı konum gözlemleridir.

Kepler 2. Yasa (1609)

Gezegenler elips üzerindeki yörünge hareketleri sırasında eşit zamanlarda eşit alanlar tararlar!

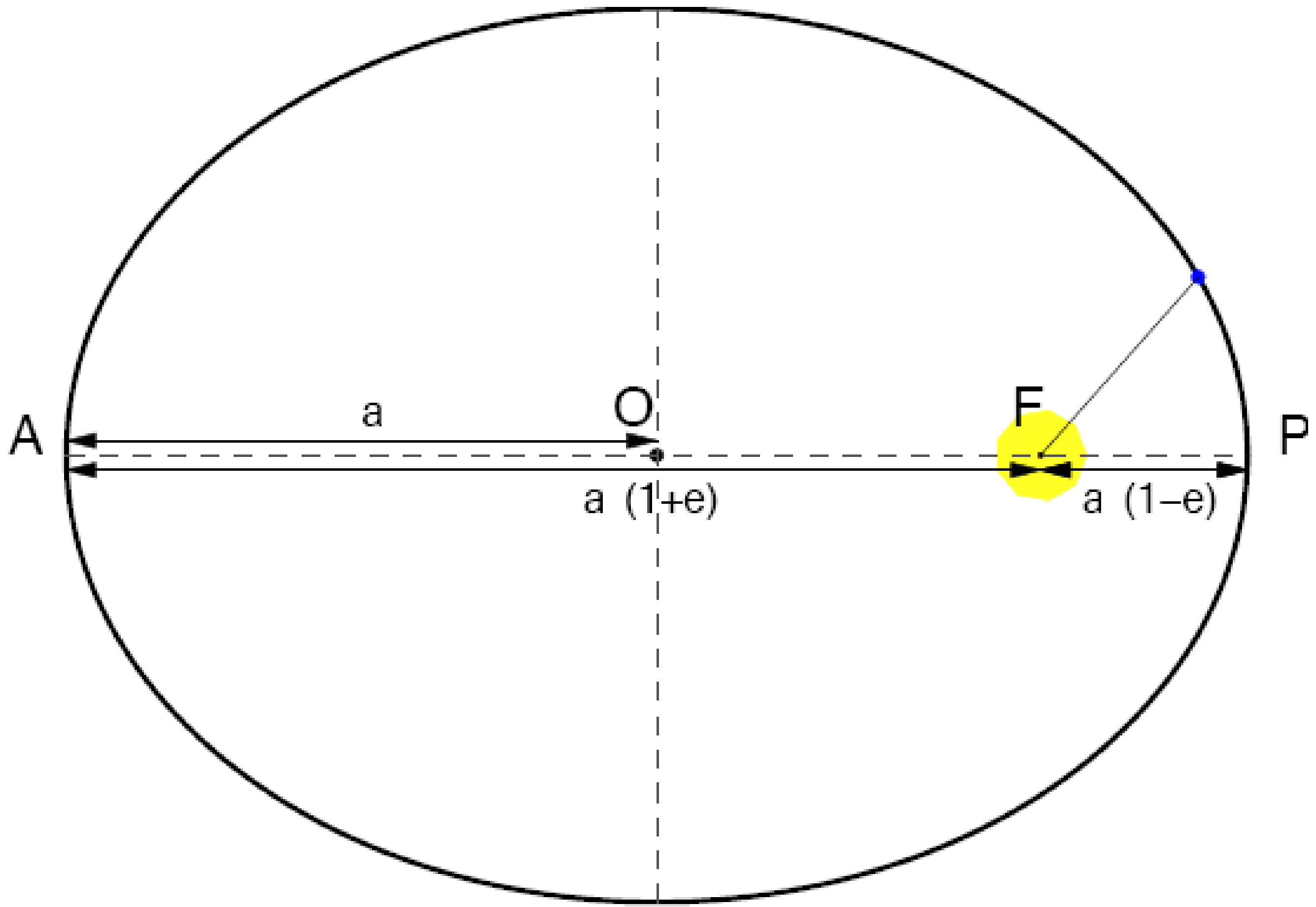


Galiel'nin teleskobu ilk kez gökyüzüne çevirdiği tarih: 1609

Kepler'in kullandığı gözlemler Galilei'nin teleskopla yaptıkları değil, Tycho Brache'nin teleskopsuz yaptığı konum gözlemleridir.

Kepler 3. Yasa (1619)

Gezegenlerin yörünge büyüklüklerinin küpü ile (a^3), yörünge dönemlerinin kareleri (P^2) arasında doğru orantı vardır!



Bu yasayı yandaki koşullar altında ve verilen birimleri kullanarak $a^3 = P^2$ şeklinde ifade edebilirsiniz.

a [AB], P [yıl], M [$M_{güneş}$]

$M_{gezegen} << M_{Yıldız}$

Newton Hareket Yasaları (1687, “Principia”)

Yasa I: (Eylemsizlik Yasası) Eylemsiz referans sistemi adı verilen öyle referans sistemleri seçebiliriz ki, bu sistemde bulunan bir parçacık üzerine bir net kuvvet etki etmiyorsa cismin hızında herhangi bir değişiklik olmaz.

Yasa II: (İvme Yasası) Eylemsiz bir referans sisteminde, bir parçacık üzerindeki net kuvvet onun çizgisel momentumunun zaman ile değişimiyle orantılıdır:

$F = d\,(mv)\,/\,dt. \rightarrow F = ma$

Yasa III: (Etki-Tepki Yasası) Bir cisme, bir kuvvet etkiyorsa; cisimden kuvvete doğru eşit büyüklükte ve zıt yönde bir tepki kuvveti oluşur.

Newton Çekim Yasası
İki Cisim Problemi (1687)

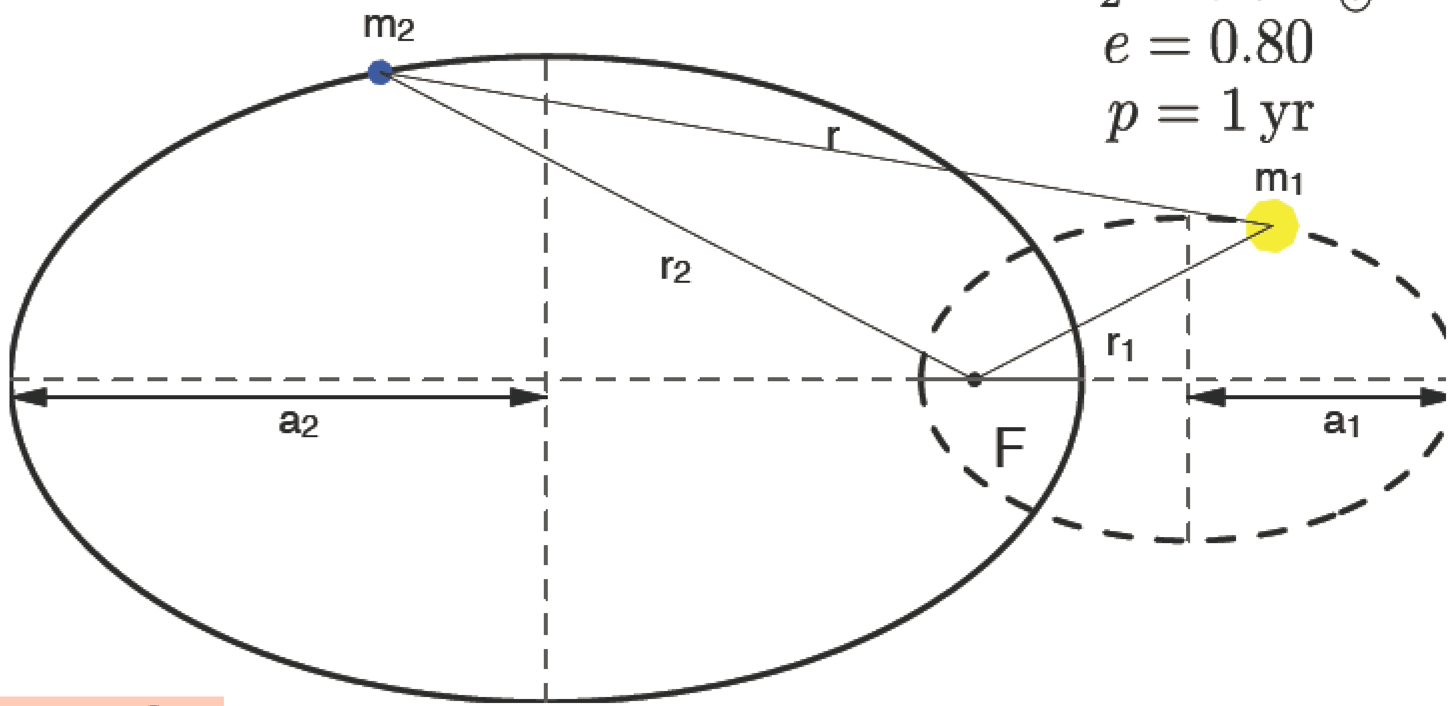
Barisentrik Yörünge: Odaklarından birinde Gezegen-Yıldız ikilisininin kütle merkezinin bulunduğu yörünge.

$$m_1 = 1.0\,\mathrm{M}_\odot$$

$$m_2 = 0.5\,\mathrm{M}_\odot$$

$$e = 0.80$$

$$p = 1\,\mathrm{yr}$$



$$\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{a_1^3}{p^2}$$

$$\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{a_2^3}{p^2}$$

a [AB], P [yıl], M [$M_{güneş}$]

Kepler Güneş'in de Bir Yörünge Hareketi Olduğunu Bilebilir miydi?

Kepler'in 3. yasasını tekrar yazalım:

$$a_1 = m_2 \left(\frac{p}{m_1 + m_2} \right)^{2/3}$$

$$a_2 = m_1 \left(\frac{p}{m_1 + m_2} \right)^{2/3}$$

İki eşitliği birbirine bölelim:

$$\boxed{a_1/a_2 = m_2/m_1}$$

M_{yer} = 3 x 10^{-6} $M_{güneş}$

a_2 = 1 AB = 149 597 871 km

=> a_1 = 448 km

M_{mars} = 3.21 x 10^{-7} $M_{güneş}$

a_2 = 1.5237 AB = 227 939 100 km

=> a_1 = 73 km

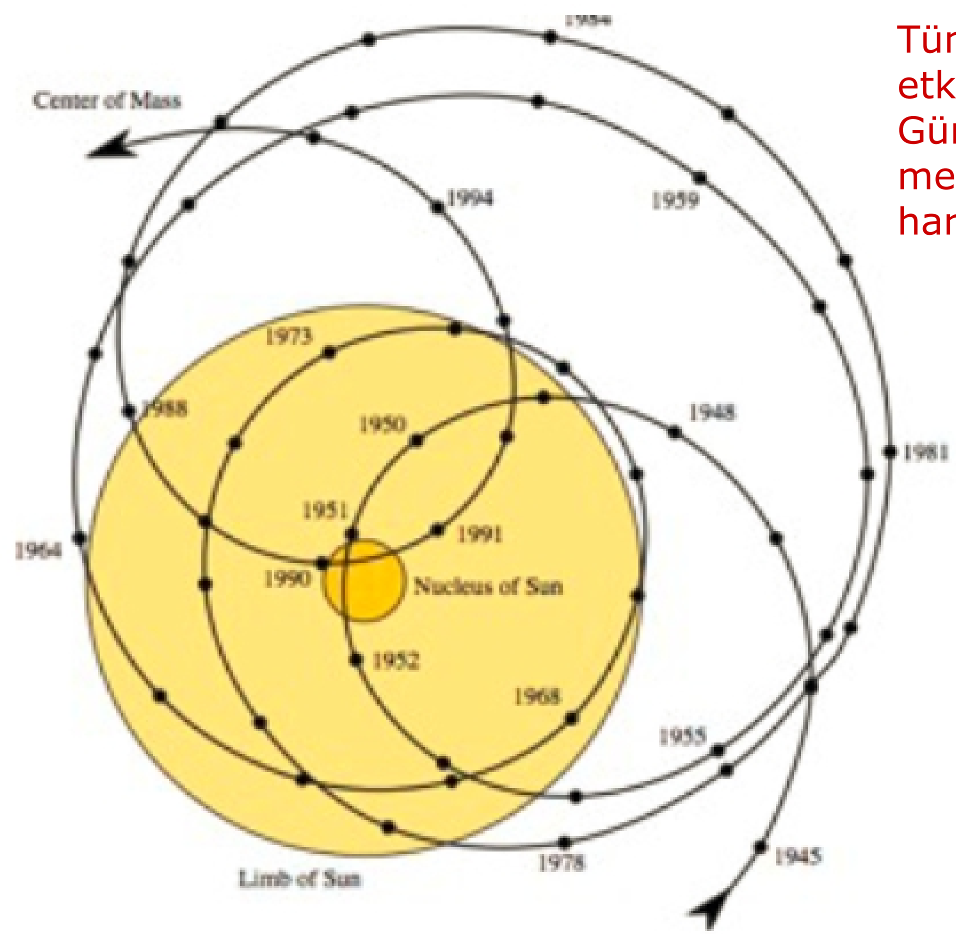
$M_{Jüpiter}$ = 0.955 x 10^{-3} $M_{güneş}$

a_2 = 5.2043 AB = 778 547 200 km

=> a_1 = 743 512 km

Güneş'in Çapı ($R_{Güneş}$): 1 392 684 km!

Kepler Güneş'in de Bir Yörünge Hareketi Olduğunu Bilebilir miydi?



Tüm gezegenlerin ortak etkisi kaynaklı olarak Güneş'in ortak kütle merkezi etrafındaki hareketi.

Credit : Wikipedia / Carl Smith

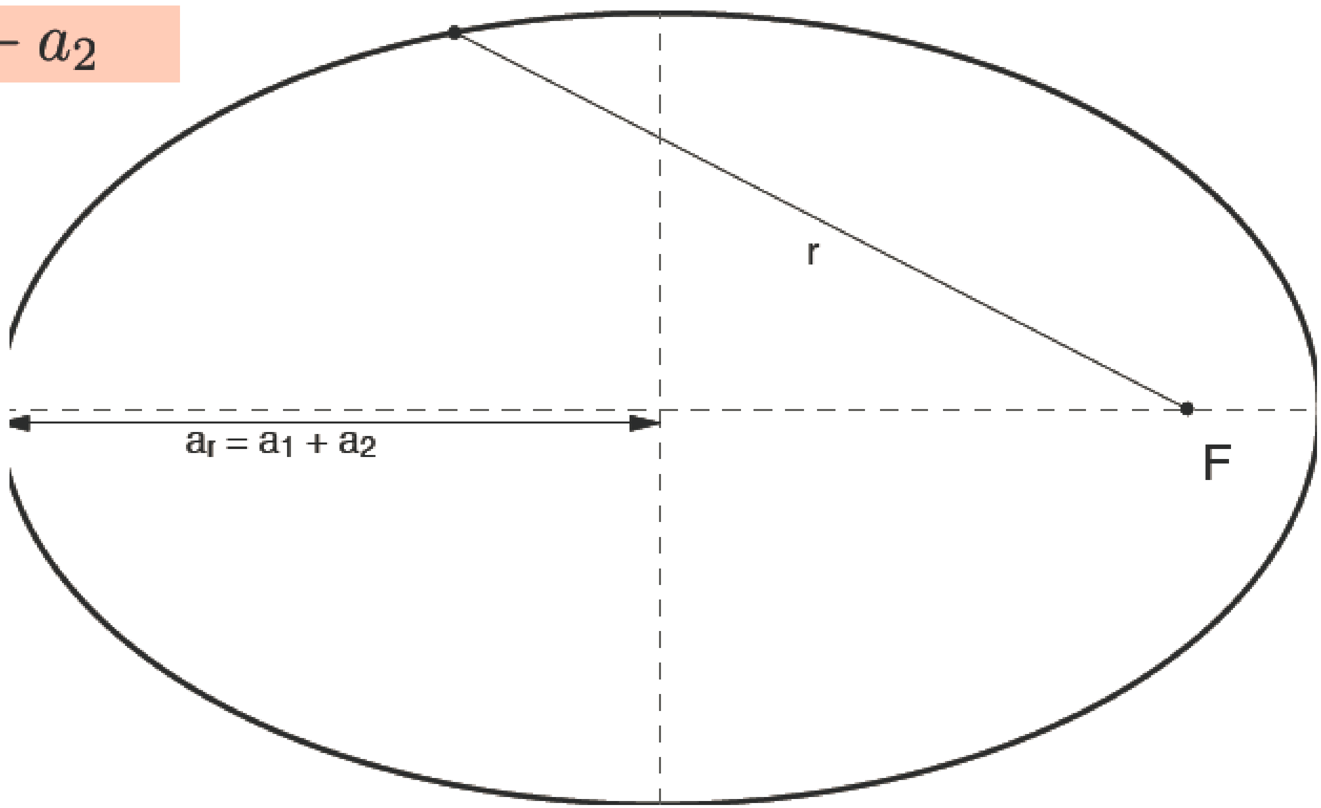
Tycho Brache dahi Güneş merkezinin konumunu bu denli hassas ölçemezdi!

Newton Çekim Yasası
İki Cisim Problemi (1687)

Göreli Yörünge:

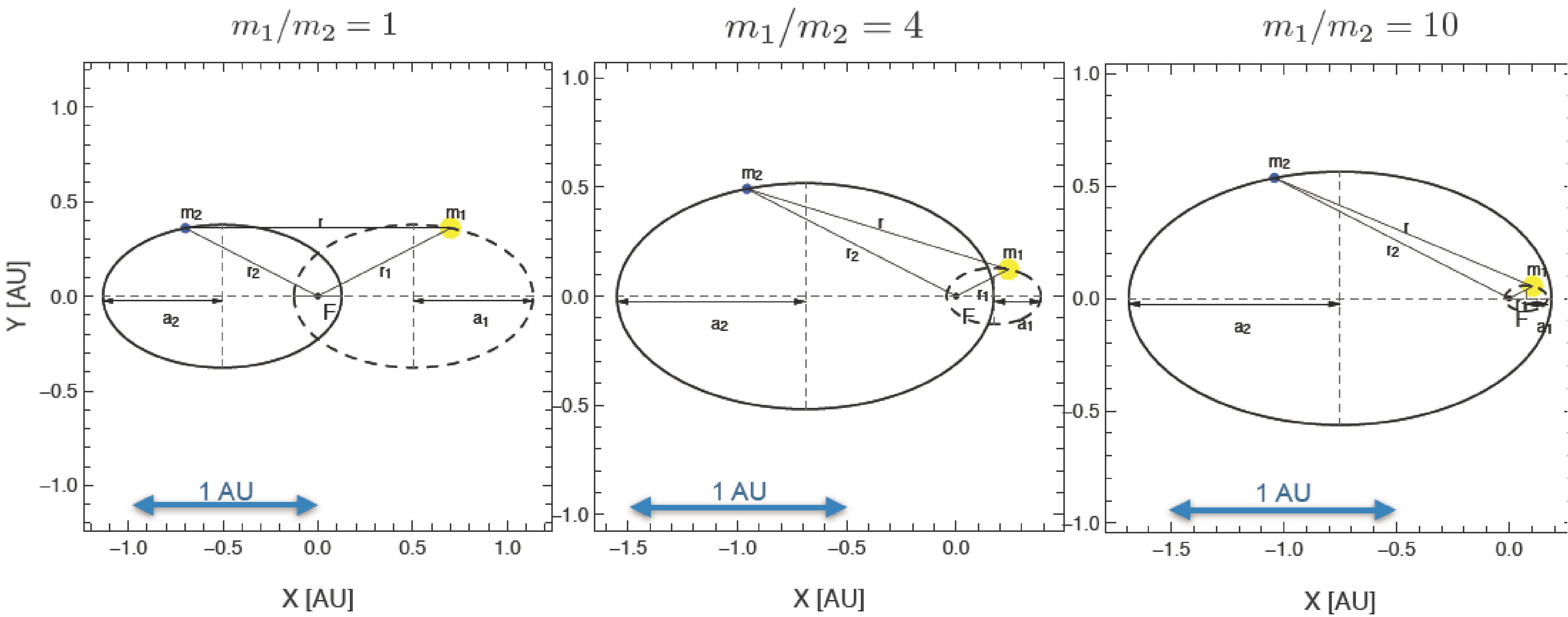
$$m_1 + m_2 = \frac{a_r^3}{p^2}$$

$$a_r = a_1 + a_2$$



$$m_1 = 1.0\,\mathrm{M}_\odot$$
$$m_2 = 0.5\,\mathrm{M}_\odot$$
$$e = 0.80$$
$$p = 1\,\mathrm{yr}$$

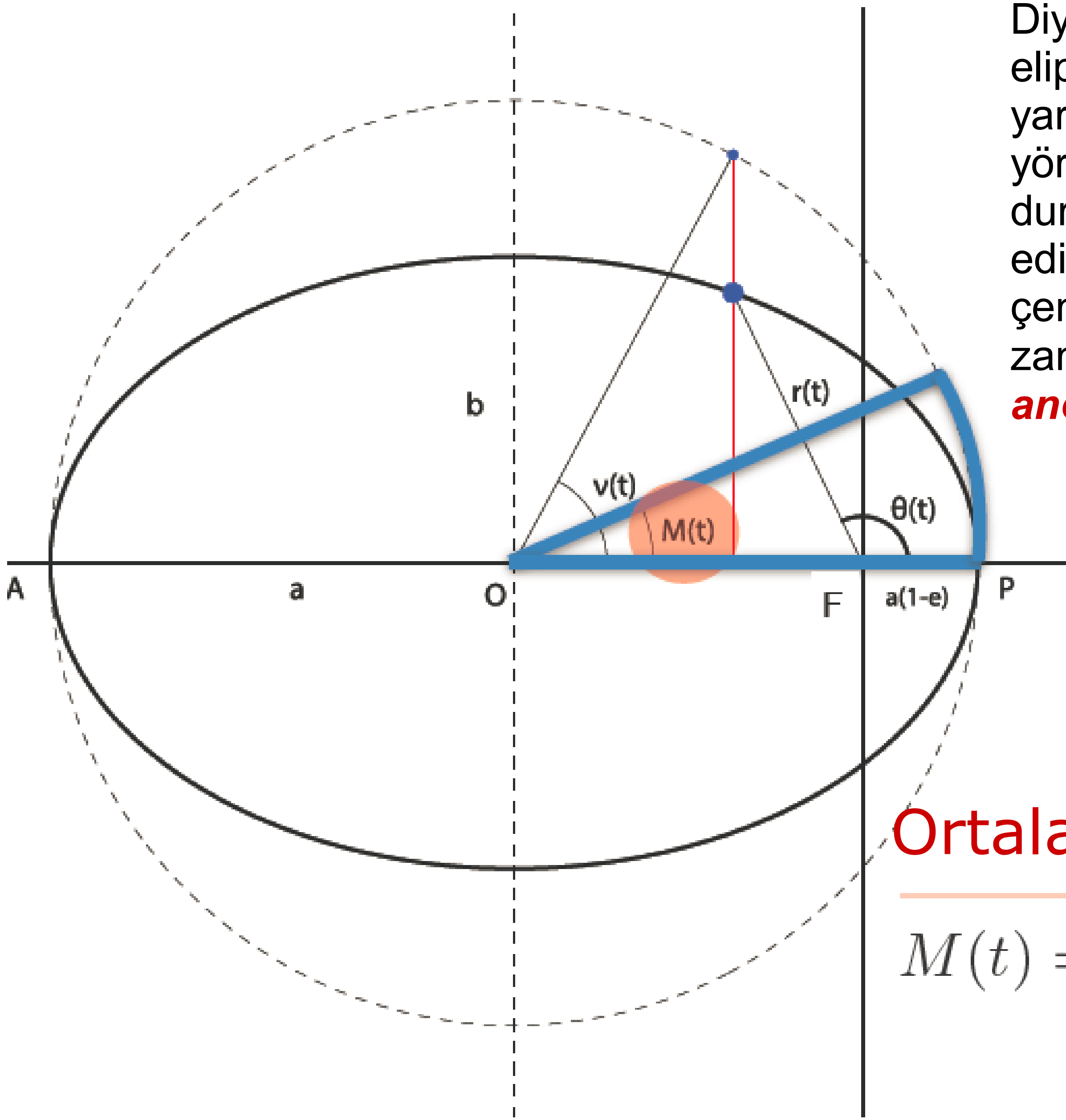
Barisentrik Yörünge



P = 1 yıl, m_1 = 1 $M_{güneş}$, e = 0.80

barus:ağır, ***center:*** merkez

Hareket: Zamanın Fonksiyonu Olarak Konum

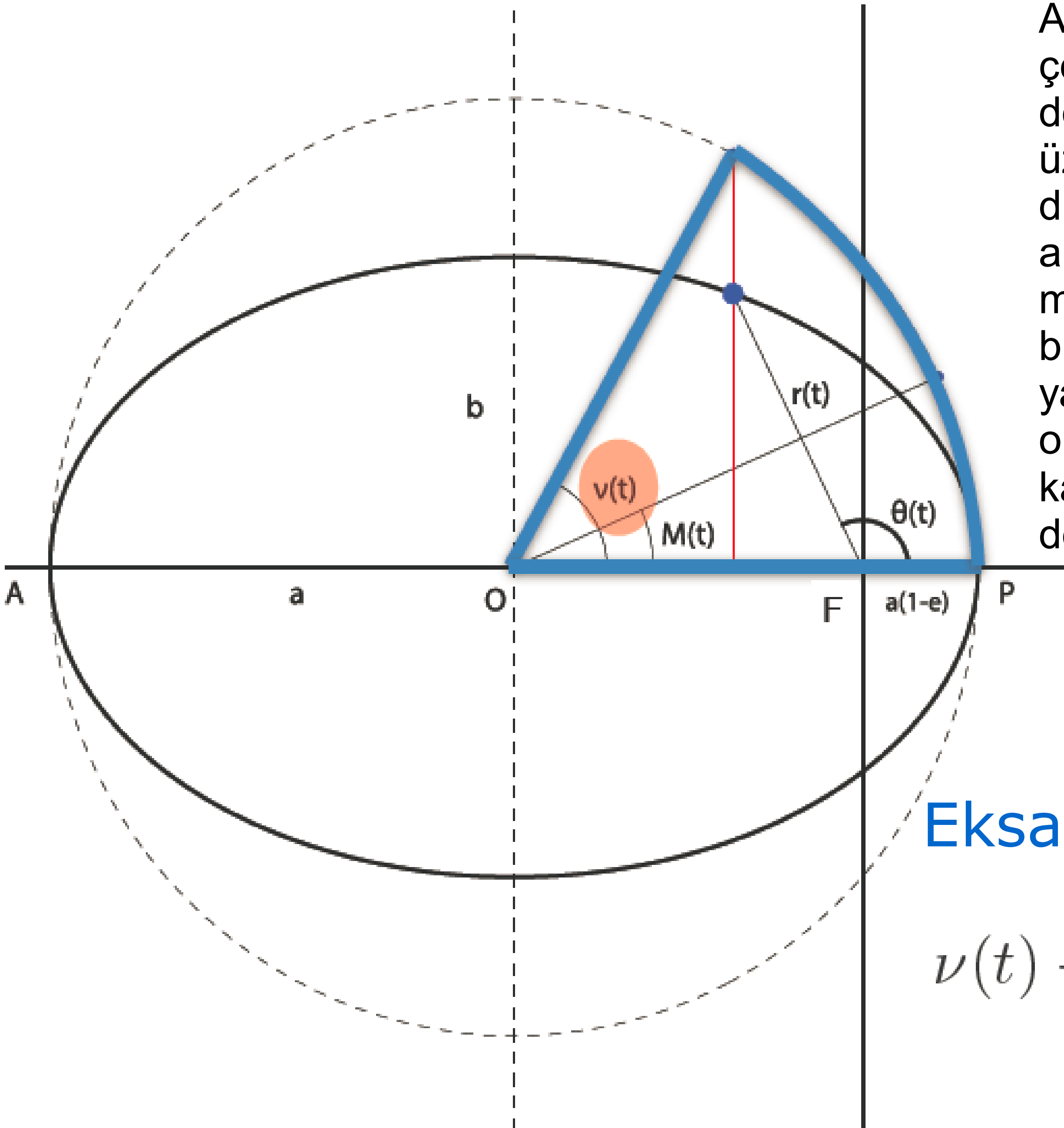


Diyelim ki gezegen (ya da yıldız!) eliptik bir yörünge üzerinde değil de yarıçapı “a” olan çembersel bir yörünge üzerinde dolanıyor olsun. Bu durumda cisim sabit hızla hareket ediyor olacaktır. İşte cismin çembersel yörüngesi üzerinde t zamanda aldığı açısal yola ***ortalama anomali* (M)** denir.

Ortalama Anomali:

$$M(t) = 2\pi \frac{t - t_0}{p} = 2\pi \frac{t}{p} + M_0$$

Hareket: Zamanın Fonksiyonu Olarak Konum

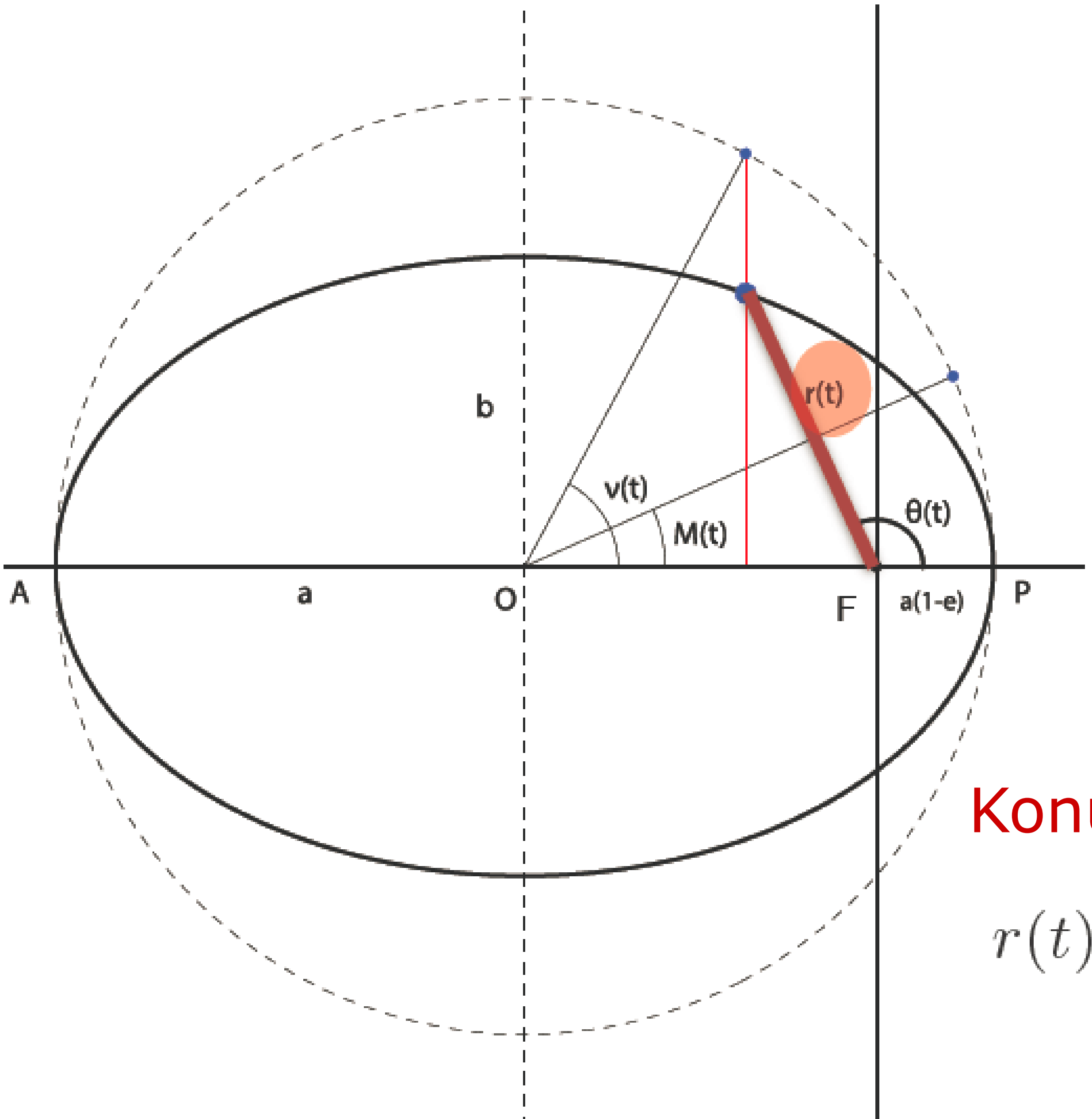


Ancak gezegen de yıldız da çembersel bir yörünge üzerinde dolanmıyor, eliptik bir yörünge üzerinde hareket ediyorlar. Bu durumda çember üzerinde t zamanda alacakları açısal yoldan farklı miktarda bir açısal yol alıyorlar. İşte bu açısal yolun yarıçapı elipsin yarıbüyük eksen uzunluğuna eşit ve onunla eş merkezli çember üzerindeki karşılığına ***eksantrik anomali*** **(ν)** denir.

Eksantrik Anomali:

$$\nu(t) - e\sin\left(\nu(t)\right) = M(t)$$

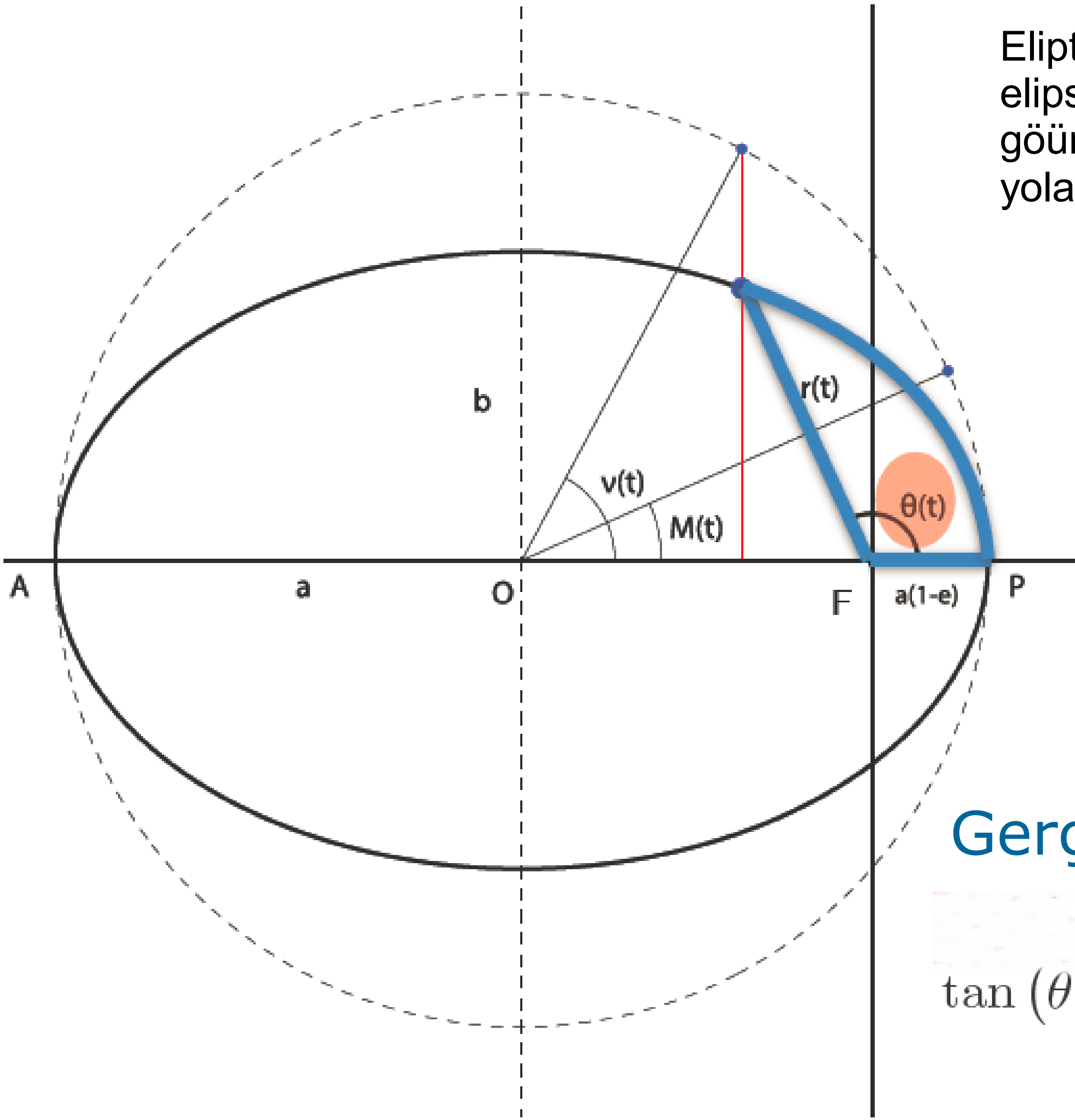
Hareket: Zamanın Fonksiyonu Olarak Konum



Konum Vektörü (r):

$$r(t) = a\Big(1 - e\cos\left(\nu(t)\right)\Big)$$

Hareket: Zamanın Fonksiyonu Olarak Konum



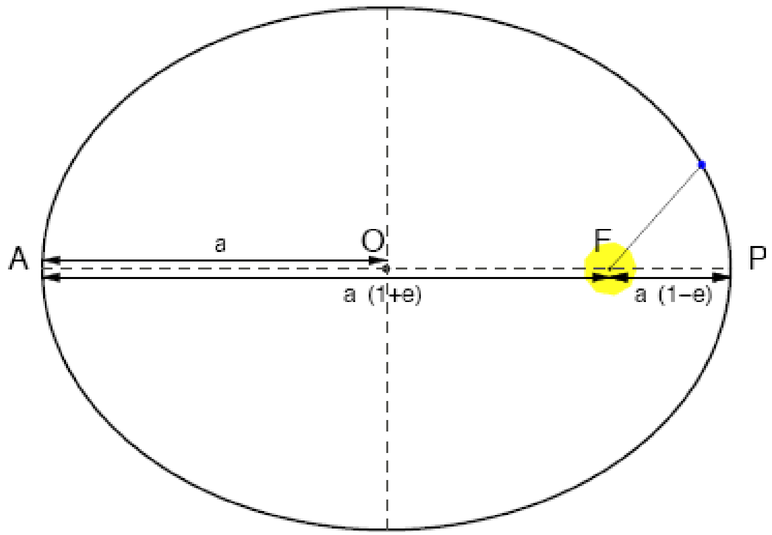
Eliptik yörüngede hareket eden cismin, elipsin merkezinden değil de odağından göürldüğü şekliyle t zamanda aldığı açısal yola ise ***gerçel anomali* (Θ)** denir.

Gerçel Anomali:

$$\tan\left(\theta(t)/2\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\nu(t)/2\right)$$

Zamanın Fonksiyonu Olarak Elips Denklemi

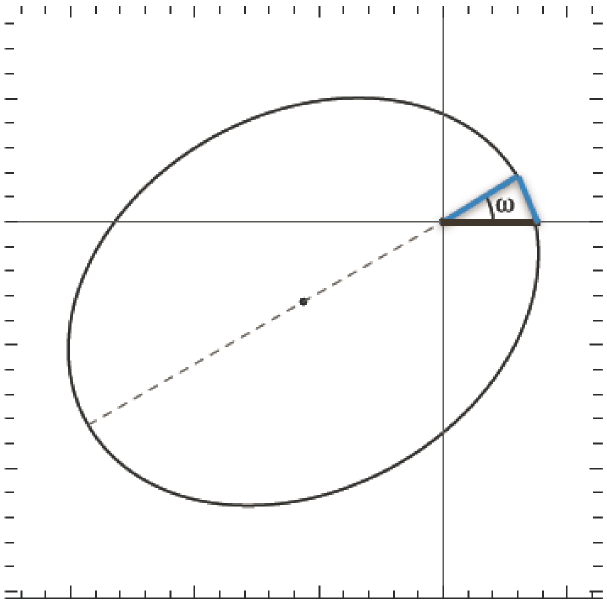
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t).\begin{pmatrix} \cos\left(\theta(t)\right) \\ \sin\left(\theta(t)\right) \end{pmatrix}$$



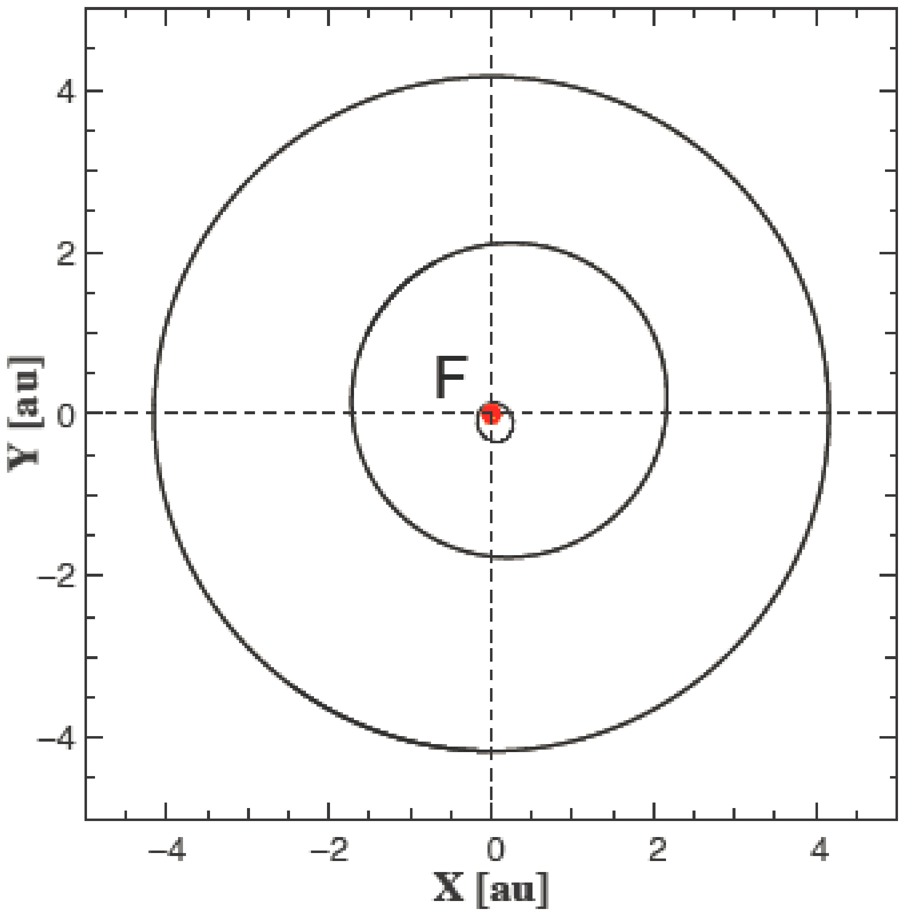
ω: Yörüngenin uzaydaki konumu olmak üzere

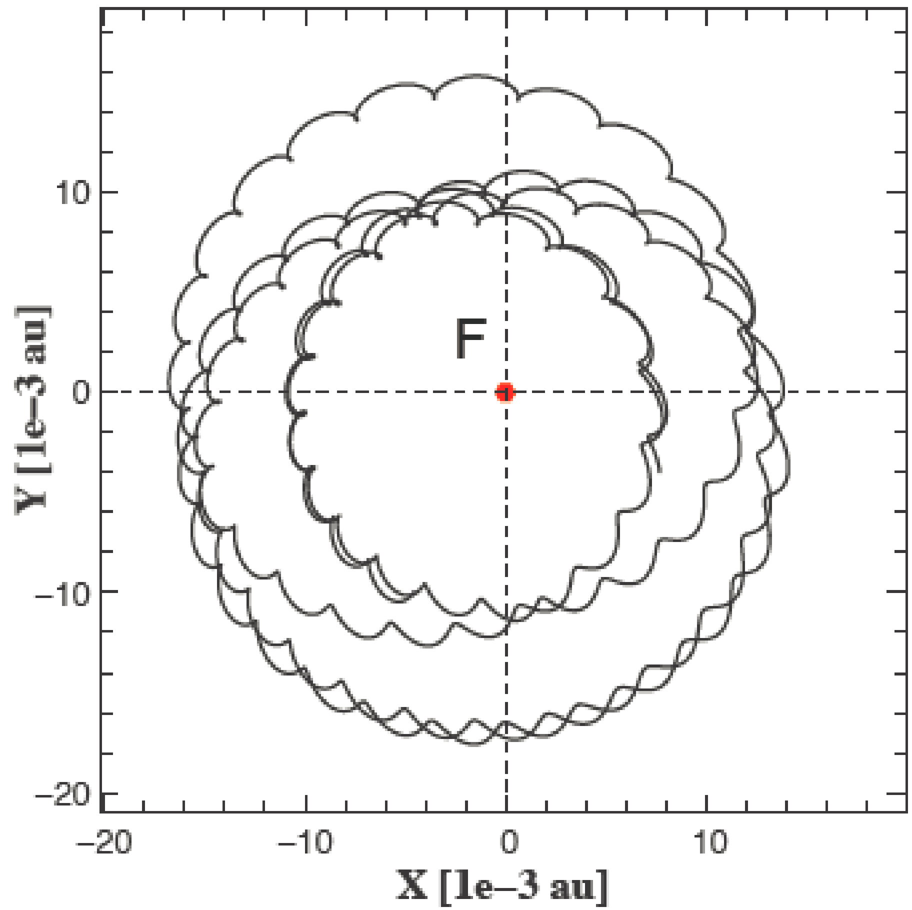
$$\Lambda(t) = \theta(t) + \omega$$ olsun

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t).\begin{pmatrix} \cos\left(\theta(t)+\omega\right) \\ \sin\left(\theta(t)+\omega\right) \end{pmatrix} = r(t).\begin{pmatrix} \cos\left(\Lambda(t)\right) \\ \sin\left(\Lambda(t)\right) \end{pmatrix}$$



Barisentrik (Kütle Merkezi Odaklı) Yörünge





Gezegenler

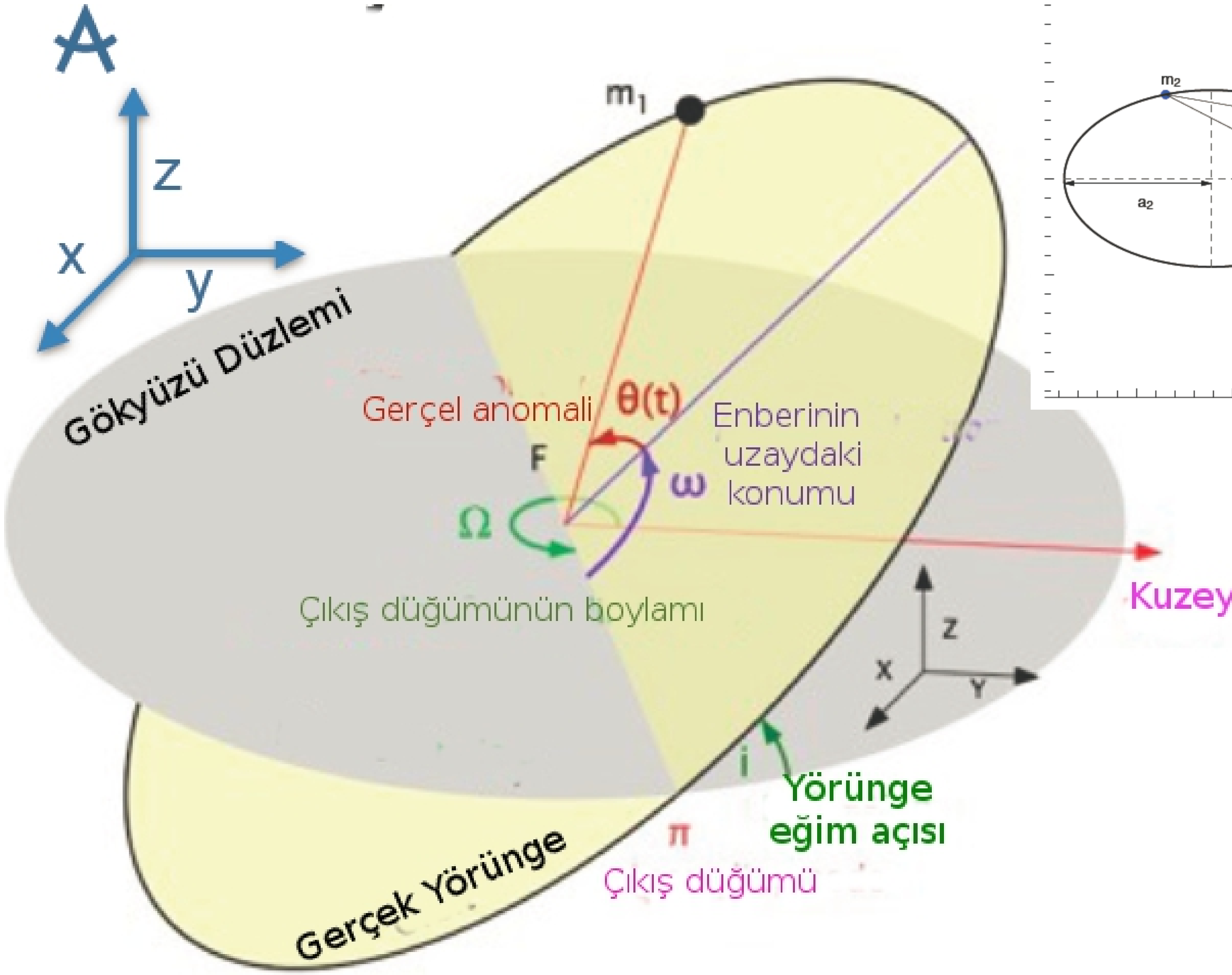
Yıldız (1 $M_{Güneş}$)

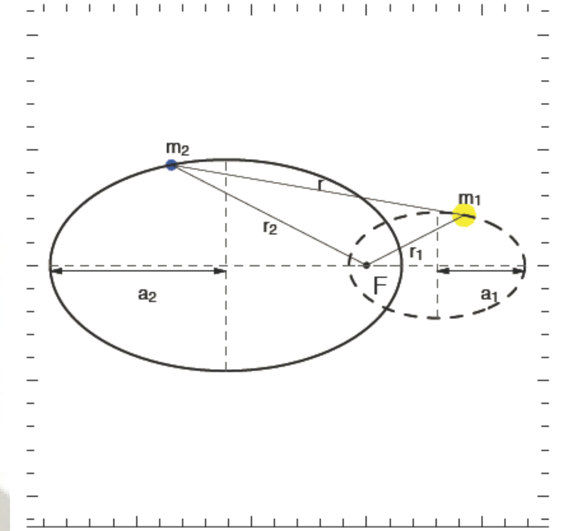
p_1=44 d
e_1= 0.47
m_1=2.2 M_{Jup}

p_2=1000 d
e_2= 0.14
m_2=6.7 M_{Jup}

p_3=3000 d
e_3= 0.00
m_3=0.9 M_{Jup}

Yörüngenin Gökyüzündeki İzdüşümü





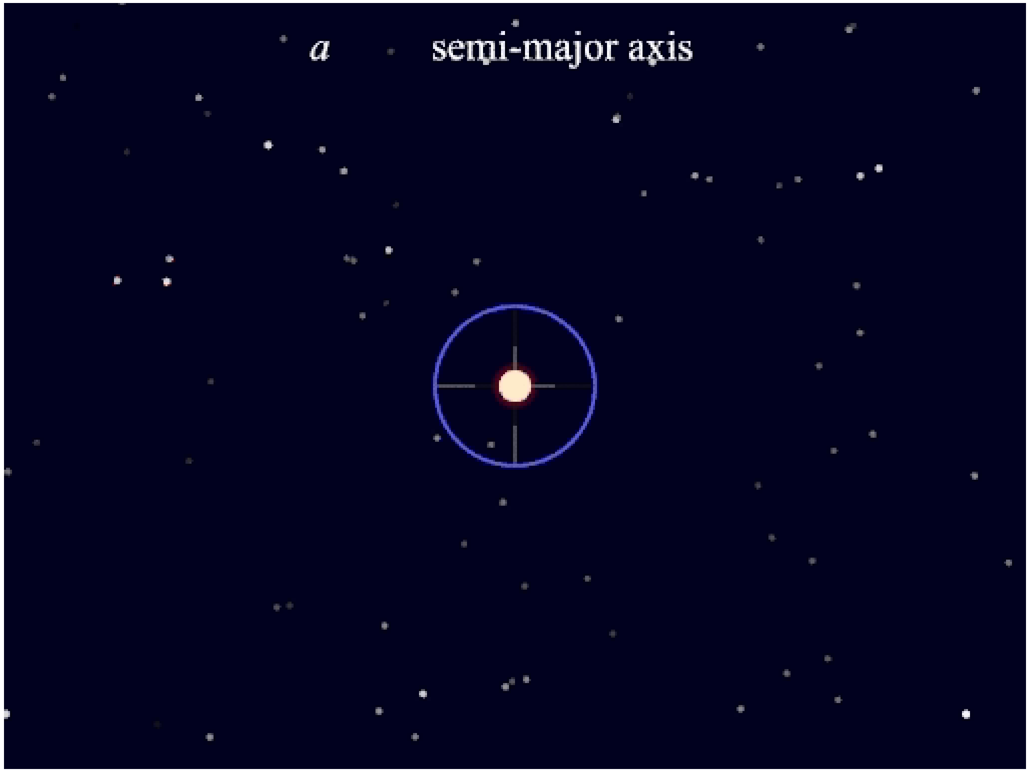
Yörünge Denklemi ve Yörünge Elemanları

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega\,\cos i & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega\,\cos i & 0 \\ 0 & \sin i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\big(\theta(t)+\omega\big) \\ \sin\big(\theta(t)+\omega\big) \\ 0 \end{pmatrix}$$

a, P, e: Yörüngenin büyüklüğü ve şekli ilgili elemanlar

ω, Ω, i: Yörüngenin oryantasyonu ile ilgili elemanlar

v: Cismin yörüngesi üzerindeki konumunu veren eleman


a semi-major axis